第２回定期考査(微分法･微分法の応用)R４．７．６　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(2x^2+5)^3$　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}$

2 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sin 3x$　　(2) $y=\cos^2 x$

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log(2x+3)$　　(2) $y=x\log_2 x$

4 次の関数を微分せよ。

(1) $y=e^{3x}$　　(2) $y=x\cdot 2^x$

5 方程式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ で定められる $x$ の関数 $y$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

6 曲線の媒介変数表示が $x=3\cos t$，$y=2\sin t$ で与えられているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を $t$ の関数として表せ。

7 関数 $y=x^{2x}$ $(x>0)$ を微分せよ。

8 曲線 $y=\tan x$ 上の原点における接線の方程式を求めよ。

9 曲線 $y=\log x$ について，原点を通る接線の方程式を求めよ。

10 関数 $f(x)=xe^{-x}$ の極値を求めよ。

11 次の関数の最大値，最小値を求めよ。　$y=x-\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$

$\boxed{12}$ 関数 $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ のグラフの概形をかけ。

$\boxed{13}$ $a$ は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

$$\frac{e^x}{x}=a$$

$\boxed{14}$ すべての正の数 $x$ に対して，不等式 $\sqrt{x}+2\leqq k\sqrt{x+1}$ が成り立つような定数 $k$ の値の範囲を求めよ。

第２回定期考査(微分法･微分法の応用)R４．７．６　$y=x^2=3x^2$ は $-1$　表記分 $-1$　$f'$ の符号が出せない　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(2x^2+5)^3$　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}$

解答 1 $y'=12x(2x^2+5)^2$ ③　2 $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ ③　$-\dfrac{x}{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ $-1$

解説

(1) $y'=3(2x^2+5)^2(2x^2+5)'=3(2x^2+5)^2\cdot 4x$

$=12x(2x^2+5)^2$　2乗ない者アウト　展開する者がいる。展開不要

(2) $y'=\{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\}'=\frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(4-x^2)'$

$=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$　2ミスナシがいる　有理化する者がいる　有理化不要

2 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sin 3x$　　(2) $y=\cos^2 x$

解答 1 $y'=3\cos 3x$ ③　2 $y'=-\sin 2x$ ③　積の微分で用いている者がいるが，合成関数である。

解説

(1) $y'=\cos 3x\cdot(3x)'=3\cos 3x$

(2) $y'=2\cos x\cdot(\cos x)'=2\cos x\cdot(-\sin x)$ ②　$-\sin^2 x$ とする者アウト

$=-\sin 2x$　2ミスナシがいる

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log(2x+3)$　　(2) $y=x\log_2 x$

解答 1 $y'=\dfrac{2}{2x+3}$ ③　2 $y'=\log_2 x+\dfrac{1}{\log 2}$ ③

解説

(1) $y'=\dfrac{1}{2x+3}\cdot(2x+3)'=\dfrac{2}{2x+3}$

(2) $y'=(x)'\log_2 x+x(\log_2 x)'=1\cdot\log_2 x+x\cdot\dfrac{1}{x\log 2}$

$=\log_2 x+\dfrac{1}{\log 2}$

4 次の関数を微分せよ。

(1) $y=e^{3x}$　　(2) $y=x\cdot 2^x$

解答 1 $y'=3e^{3x}$ ③　2 $y'=2^x(1+x\log 2)$ ③

解説

(1) $y'=e^{3x}\cdot(3x)'=3e^{3x}$

(2) $y'=(x)'2^x+x(2^x)'=1\cdot 2^x+x\cdot 2^x\log 2$　因数分解できない者アウト

$=2^x(1+x\log 2)$ ②

5 方程式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ で定められる $x$ の関数 $y$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

解答 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{9y}$ ③

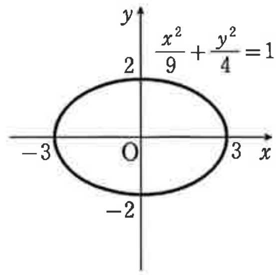
解説

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の両辺を $x$ で微分すると

$\dfrac{2x}{9}+\dfrac{2y}{4}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$y\neq 0$ のとき

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{9y}$



6 曲線の媒介変数表示が $x=3\cos t$，$y=2\sin t$ で与えられているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を $t$ の関数として表せ。

解答 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2\cos t}{3\sin t}$ ③　$-\dfrac{2}{3\tan t}$ もOK.

解説

$\dfrac{dx}{dt}=-3\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=2\cos t$ から

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cos t}{-3\sin t}=-\dfrac{2\cos t}{3\sin t}$

7 関数 $y=x^{2x}$ $(x>0)$ を微分せよ。

解答 $y'=2x^{2x}(\log x+1)$ ⑧　$y'=2x\cdot x^{2x-1}$ まちがいアウト

解説

$x>0$ であるから　$x^{2x}>0$

$y=x^{2x}$ について，両辺の自然対数をとると　$\log y=2x\log x$　$y'=2y(\log x+1)$ ⑥

この両辺を $x$ で微分すると　$\dfrac{y'}{y}=2\cdot\log x+2x\cdot\dfrac{1}{x}=2(\log x+1)$ ④

ゆえに　$y'=2y(\log x+1)=2x^{2x}(\log x+1)$　因数分解していない $-1$

8 曲線 $y=\tan x$ 上の原点における接線の方程式を求めよ。

解答 $y=x$ ⑧　$y=\dfrac{1}{\cos^2 x}x$ まちがいアウト

解説

$f(x)=\tan x$ とすると

$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ②

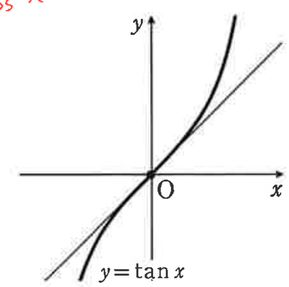
であるから

$f'(0)=1$

よって，点 A(0, 0) における接線の方程式は

$y-0=1\cdot(x-0)$

すなわち　$y=x$



9 曲線 $y=\log x$ について，原点を通る接線の方程式を求めよ。

解答 $y=\dfrac{1}{e}x$ ⑧

解説

$y=\log x$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{x}$

ここで，接点の座標を $(a,\ \log a)$ とすると，接線の方程式は

$y-\log a=\dfrac{1}{a}(x-a)$

すなわち　$y=\dfrac{1}{a}x+\log a-1$　……①

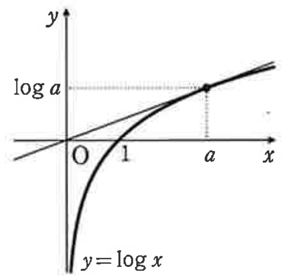
接線①が原点 (0, 0) を通るから

$0=\dfrac{1}{a}\cdot 0+\log a-1$

よって　$\log a=1$ ④

したがって　$a=e$ ②

①に代入すると　$y=\dfrac{1}{e}x$ ②



10 関数 $f(x)=xe^{-x}$ の極値を求めよ。

解答 $x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$，極小値はない ⑧　言ってない $-2$　言ってない者アウト

解説

$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$ ②

$f'(x)=0$ とすると　$x=1$ ②

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | …… | 1 | …… |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | 極大 $\frac{1}{e}$ | ↘ |

$x=1$ で極小になる者アウト

極値 $\frac{1}{e}$ というのもあった。

よって，$f(x)$ は $x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる。極小値はない。

11 次の関数の最大値，最小値を求めよ。　$y=x-\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$

解答 $x=\dfrac{5}{6}\pi$ で最大値 $\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\dfrac{\pi}{6}$ で最小値 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑧

解説

$y'=1-2\cos 2x$

$0<x<\pi$ において $y'=0$ となる $x$ の値は，

$\cos 2x=\dfrac{1}{2}$ から　$x=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$ ④　$\frac{5}{6}\pi$ が出てこない。

$y$ の増減表は，次のようになる。

| $x$ | 0 | … | $\frac{\pi}{6}$ | … | $\frac{5}{6}\pi$ | … | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $y$ | 0 | ↘ | 極小 | ↗ | 極大 | ↘ | $\pi$ |

増減表ちがっていたら $-2$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ も出てこない。

0 のときと $\pi$ のときが書かれていない。

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき　$y=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき　$y=\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$x=\dfrac{5}{6}\pi$ で最大値 $\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，②

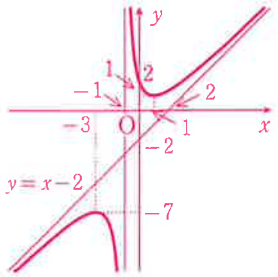
$x=\dfrac{\pi}{6}$ で最小値 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ②

/70

12 関数 $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ のグラフの概形をかけ。

(10)

解答




・それぞれも $y''$ が求められない
・何が漸近線になるかわからない

・$y''=-\dfrac{8}{(x+1)^3}$ 多し

・グラフがつながる者多し

解説

関数の定義域は $x \neq -1$ である。

$f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ とする。

$f(x)=x-2+\dfrac{4}{x+1}$ であるから

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2},\quad f''(x)=\frac{8}{(x+1)^3}$$

-2 -2

$f'(x)=0$ とすると　$x=-3,\ 1$

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる。

| $x$ | …… | $-3$ | …… | $-1$ | …… | $1$ | …… |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | ／ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | ／ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 極大 $-7$ | ↘ | ／ | ↘ | 極小 $1$ | ↗ |

($y''$がある増減表)

-2

また　∪∩なども多い

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-1-0}f(x)=-\infty$$

であるから，直線 $x=-1$ はこの曲線の漸近線である。

さらに，

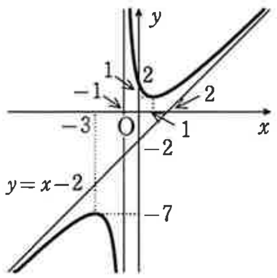
漸近線 $y=x-2$ -2

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x-2)\}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(x-2)\}=0$$

であるから，直線 $y=x-2$ もこの曲線の漸近線である。

以上から，グラフの概形は，右の図のようになる。




$\lim_{x\to\infty} y=x-2$ と書く者がいる

(漸近線がない
漸近線がちがう
でも，通る点と
形が
正しければ
-2)

lim の書き方が悪い者多し -1
(10点の者で不備があったら -1)

漸近線に
ぶつかない
グラフを描く

13 $a$ は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

$$\frac{e^x}{x}=a$$

解答　$a>e$ のとき 2 個，$a=e$，$a<0$ のとき 1 個，$0\leqq a<e$ のとき 0 個　(10)

解説

$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ とすると

$$f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

-2

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

| $x$ | …… | $0$ | …… | $1$ | …… |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | ／ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | ／ | ↘ | 極小 $e$ | ↗ |

これがない

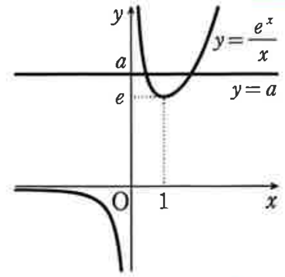
-2

また

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-0}f(x)=-\infty$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる。




このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する。

したがって

$a>e$ のとき 2 個

$a=e$，$a<0$ のとき 1 個

$0\leqq a<e$ のとき 0 個

(増減表が正しくて) 右 -2

$a=0,\ a=e$ がない者がいる

$y''$ を求めている者がいる

$y''$ を求めて，間違っている

(その者は増減表へ -2 を与えない)

($y''(x)=\dfrac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$ が正しい)

14 すべての正の数 $x$ に対して，不等式 $\sqrt{x}+2\leqq k\sqrt{x+1}$ が成り立つような定数 $k$ の値の範囲を求めよ。

解答　$k\geqq\sqrt{5}$　(10)

解説

$\sqrt{x+1}>0$ であるから

$$\sqrt{x}+2\leqq k\sqrt{x+1} \iff \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+1}}\leqq k$$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+1}}$ とするとき，与えられた不等式がすべての正の数 $x$ に対して成り立つための必要十分条件は，$k$ の値が $f(x)$ の最大値以上となることである。

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+1}-(\sqrt{x}+2)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$=\frac{(x+1)-(\sqrt{x}+2)\sqrt{x}}{2(x+1)\sqrt{x(x+1)}}=\frac{1-2\sqrt{x}}{2(x+1)\sqrt{x(x+1)}}$$

-4

よって，$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{4}$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $0$ | … | $\frac{1}{4}$ | … |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ／ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ／ | ↗ | 極大 | ↘ |

ゆえに，$f(x)$ の最大値は　$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\sqrt{5}$　-4

よって，求める $k$ の値の範囲は　$k\geqq\sqrt{5}$

/30