第２回定期考査(数学Ｉ演習)Ｒ４．７．６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ ２次関数 $y=x^2+2(a-1)x$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最小値とそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 数列　1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，5，5，5，5，5，6，……の第 n 項を a_n とする。a_{215} を求めよ。

$\boxed{3}$ a を定数とし，x の２次関数 $y=x^2-2(a-1)x+2a^2-8a+4$ のグラフを G とする。グラフ G が x 軸の負の部分と異なる２点で交わるような a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{4}$ 等差数列 $\{a_n\}$ に対して，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。

ここで，初項 $a_1=38$，第 $(m+1)$ 項 $a_{m+1}=5$，$S_{m+1}=258$ とする。

(1) m の値を求めよ。

(2) S_n の最大値とそのときの n の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 1から５までの番号のついた球がそれぞれ一つずつあり，これら五つの球を A，B，C，D の四つの箱に入れる。ただし，それぞれの箱には五つまで球を入れることができるものとする。少なくとも一つの箱が空であるような球の入れ方は 何通りあるか。

$\boxed{6}$ 赤球４個，青球３個，白球５個，合計 12 個の球がある。これら 12 個の球を袋の中に入れ，この袋から A さんがまず１個取り出し，その球をもとに戻さずに続いて B さんが１個取り出す。A さんは１球取り出したのち，その色を見ずにポケットの中にしまった。B さんが取り出した球が白球であることがわかったとき，A さんが取り出した球も白球であった条件付き確率を求めよ。

$\boxed{7}$ 四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。辺OAを4：3に内分する点をP，辺BCを5：3に内分する点をQとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 線分PQの中点をRとし，直線ARが△OBCの定める平面と交わる点をSとする。そのとき，AR：ASを最も簡単な自然数の比で表せ 。

$\boxed{8}$ 座標平面において放物線 $y=x^2$ を C とし，直線 $y=ax$ を ℓ とする。ただし， $0<a<1$ とする。C と ℓ で囲まれた図形の面積を S_1 とし，次に C と ℓ と直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。二つの面積の和 $S=S_1+S_2$ について , S の最小値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{9}$ 以下の問いに答えよ。ただし , 必要があれば等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

を用いてもよい。

(1) 実数 a , b , c に対して , 不等式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geqq 0$ を示せ。また, 等号が成り立つときの a , b , c の条件を求めよ。

(2) 正の実数 x , y , z に対して , 不等式 $\dfrac{x+y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{xyz}$ を示せ。また, 等号が成り立つときの x , y , z の条件を求めよ。

第２回定期考査(数学Ⅰ演習)R４．７．６　　　(　)組(　)番　名前(　)

ケアレスミス

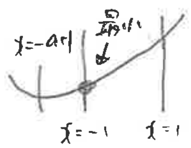
1
2次関数 $y=x^2+2(a-1)x$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最小値とそのときの x の値を求めよ。

$y=x^2+2(a-1)x$
$=\{x+(a-1)\}^2-(a-1)^2$
$=\{x+(a-1)\}^2-a^2+2a-1$
$=\{x+(a-1)\}^2+(-a^2+2a-1)$

頂点 $(-a+1,\ -a^2+2a-1)$

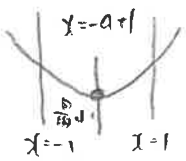
軸が ちがう者 多し

• $-a+1<-1$ (つまり $a>2$)



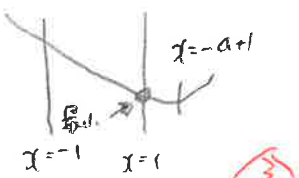
$x=-1$ で最小
$y=(-1)^2+2(a-1)(-1)$
$=-2a+3$

• $-1\leqq -a+1\leqq 1$ (つまり $0\leqq a\leqq 2$)



$x=-a+1$ で最小
$y=-a^2+2a-1$

• $1<-a+1$ (つまり $a<0$)



$x=1$ で最小
$y=1^2+2(a-1)\cdot 1$
$=2a-1$

以上より
$a>2$ のとき 最小値 $-2a+3$ $(x=-1)$
$0\leqq a\leqq 2$ のとき 最小値 $-a^2+2a-1$ $(x=-a+1)$
$a<0$ のとき 最小値 $2a-1$ $(x=1)$

2
数列　1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，5，5，5，5，5，6，……の第 n 項を a_n とする。a_{215} を求めよ。

1 | 2, 2 | 3, 3, 3 | 4, 4, 4, 4 | 5, 5, …
1群　2群　3群　4群

第 n 群に n 個の n が入るとする。
第215項が n 群に属するとすると

1 | 2, 2 | …… | … | $(n-1)$ | $n, n, \cdots n$　a_{215}

$1+2+\cdots+(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$

$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

$\frac{1}{2}(n-1)n<215\leqq \frac{1}{2}n(n+1)$

が成り立つ。各辺2倍して
$(n-1)n<430\leqq n(n+1)$

$\sqrt{400}=20$
$21^2=441$

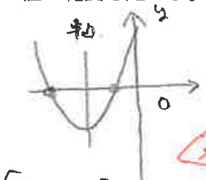
$n=21$ とすると　$20\cdot 21=420$，$21\cdot 22=462$
よりこの不等式を満たすので a_{215} は第21群に属する

つまり $a_{215}=21$

3
a を定数とし，x の2次関数 $y=x^2-2(a-1)x+2a^2-8a+4$ のグラフを G とする。グラフ G が x 軸の負の部分と異なる2点で交わるような a の値の範囲を定めよ。

$y=x^2-2(a-1)x+2a^2-8a+4$
$=\{x-(a-1)\}^2-(a-1)^2+2a^2-8a+4$
$=\{x-(a-1)\}^2+a^2-6a+3$

頂点 $(a-1,\ a^2-6a+3)$

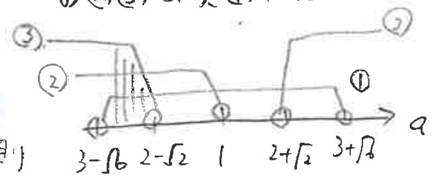


[1] 頂点のy座標 <0
$a^2-6a+3<0$
$3-\sqrt{6}<a<3+\sqrt{6}$ …①

[2] 軸 $x=a-1$ が y軸の左側
$a-1<0$ よって $a<1$ …②

[3] $x=0$ のとき $y>0$
$y=2a^2-8a+4>0$
÷2　$a^2-4a+2>0$
$a<2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}<a$ …③

①②③の共通範囲より



$(3-\sqrt{6})-(2-\sqrt{2})$
$=1+\sqrt{2}-\sqrt{6}<0$
$(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2$
$=2\sqrt{2}-3=\sqrt{8}-\sqrt{9}<0$

$3-\sqrt{6}<a<2-\sqrt{2}$

4
等差数列 $\{a_n\}$ に対して，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。

ここで，初項 $a_1=38$，第 $(m+1)$ 項 $a_{m+1}=5$，$S_{m+1}=258$ とする。

(1) m の値を求めよ。

(2) S_n の最大値とそのときの n の値を求めよ。

計算ミス者多し

(1)
$S_{m+1}=\frac{1}{2}(m+1)(a_1+a_{m+1})$ より
$258=\frac{1}{2}(m+1)(38+5)$　← $\frac{1}{2}\times$項数(初項+末項)
$258\times 2=(m+1)\times 43$
$6\times 2=m+1$
$m=11$

(2)
(1)より $a_{12}=5$ である。
公差を d とすると
$a_{12}=a_1+(12-1)\cdot d$
$=38+11d$
よって $38+11d=5$
$11d=-33$
$d=-3$
ゆえに
$a_n=38+(n-1)(-3)$
$=41-3n$

$a_n>0$ となる n の範囲は
$41-3n>0$ より $n<\frac{41}{3}=13\frac{2}{3}$
したがって，正の項を足し続けることができるぎりぎりは $n=13$ のときまで。
ここで
$S_{13}=\frac{1}{2}\cdot 13\{2\cdot 38+(13-1)(-3)\}$
$=\frac{1}{2}\cdot 13(76-36)$
$=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 40=260$

最大値 260 $(n=13)$

5
1から5までの番号のついた球がそれぞれ一つずつあり，これら五つの球を A，B，C，D の四つの箱に入れる。ただし，それぞれの箱には五つまで球を入れることができるものとする。少なくとも一つの箱が空であるような球の入れ方は何通りあるか。

①，②，③，④，⑤
A | B | C | D

球の入れ方は，$4^5=1024$ 通りある。
すべての箱に球が入る入れ方について
2個の球が同じ箱に入るので
その球の選び方が ${}_5C_2$ 通り
また例えば ①と②が同じ箱に入るとき

(①②)，③，④，⑤
A | B | C | D

それぞれがどの箱に入るか $4!$ 通り

よってすべての箱に球が入るのは
${}_5C_2\times 4!$
$=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\times 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$
$=10\cdot 24=240$ 通り

以上より
$1024-240$
$=784$ 通り

6
赤球4個，青球3個，白球5個，合計12個の球がある。これら12個の球を袋の中に入れ，この袋から A さんがまず1個取り出し，その球をもとに戻さずに続いて B さんが1個取り出す。A さんは1球取り出したのち，その色を見ずにポケットの中にしまった。B さんが取り出した球が白球であることがわかったとき，A さんが取り出した球も白球であった条件付き確率を求めよ。

A白 → B白
$\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}=\frac{20}{12\times 11}$

A赤 → B白
$\frac{4}{12}\times\frac{5}{11}=\frac{20}{12\times 11}$

A青 → B白
$\frac{3}{12}\times\frac{5}{11}=\frac{15}{12\times 11}$

よって求める条件つき確率は
$$\frac{\frac{20}{12\times 11}}{\frac{20}{12\times 11}+\frac{20}{12\times 11}+\frac{15}{12\times 11}}=\frac{20}{20+20+15}=\frac{20}{55}=\frac{4}{11}$$

/65

7 四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とする。辺OAを4：3に内分する点をP，辺BCを5：3に内分する点をQとする。

(1) $\overrightarrow{PQ}$を$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$を用いて表せ。

(2) 線分PQの中点をRとし，直線ARが△OBCの定める平面と交わる点をSとする。そのとき，AR：ASを最も簡単な自然数の比で表せ。

(1)

$\overrightarrow{OP}=\frac{4}{7}\vec{a}$，また内分の公式より

$\overrightarrow{OQ}=\frac{3\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}}{5+3}=\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}$

よって $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\left(\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}\right)-\frac{4}{7}\vec{a}$

$=-\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}$　5

(2)

$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}\right)=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}+\frac{5}{16}\vec{c}$

3点A, R, Sは一直線上にあるので $\overrightarrow{AS}=t\overrightarrow{AR}$ となる

実数tが存在する。すると

$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ とまちがえている

$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AS}$

$=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AR}$

$=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA})$

$=\vec{a}+t\left\{\left(\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}+\frac{5}{16}\vec{c}\right)-\vec{a}\right\}$

$=\vec{a}+t\left(-\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}+\frac{5}{16}\vec{c}\right)$

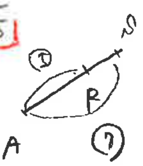
$=\left(1-\frac{5}{7}t\right)\vec{a}+\frac{3}{16}t\vec{b}+\frac{5}{16}t\vec{c}$　5

Sは平面OBC上の点であるから $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$は一次独立より

$\overrightarrow{OS}$が$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$で表されるならば$\vec{a}$の係数は0である。

（$\vec{b}$と$\vec{c}$のみで表される）

よって $1-\frac{5}{7}t=0$ より $\frac{5}{7}t=1$ ゆえに $t=\frac{7}{5}$

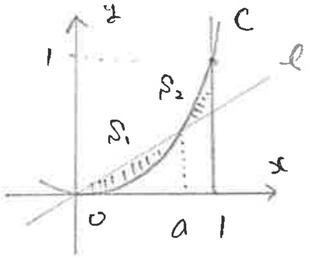


3

$\overrightarrow{AS}=\frac{7}{5}\overrightarrow{AR}$ より AR：AS＝5：7

10

8 座標平面において放物線$y=x^2$をCとし，直線$y=ax$をℓとする。ただし，$0<a<1$とする。Cとℓで囲まれた図形の面積をS_1とし，次にCとℓと直線$x=1$で囲まれた図形の面積をS_2とする。二つの面積の和$S=S_1+S_2$について，Sの最小値とそのときのaの値を求めよ。



Cとℓの原点以外の交点のx座標は

$x^2=ax$

$x(x-a)=0$ より $x=0, a$

$x\neq0$ より $x=a$である。

$S_1=\int_0^a(\ell-C)dx$　わっこがない

$=\int_0^a(ax-x^2)dx$

$=-\int_0^a x(x-a)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(a-0)^3=\frac{1}{6}a^3$

$S_2=\int_a^1(C-\ell)dx$

$=\int_a^1(x^2-ax)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right]_a^1=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a\cdot a^2\right)$

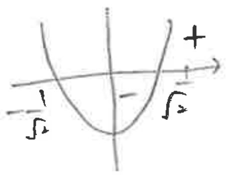
$=\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$

よって $S=S_1+S_2=\frac{1}{6}a^3+\left(\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$

5

$\frac{d}{da}S=\frac{1}{3}\cdot3a^2-\frac{1}{2}\cdot1=a^2-\frac{1}{2}$

$\frac{d}{da}S=0$となるのは $0<a<1$ より $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$



増減表

a	0	…	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	…	1
$\frac{dS}{da}$		−	0	+	
S		↘	最小	↗	

2

$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$のとき

$S=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{3\cdot2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3}=\frac{1-3}{6\sqrt{2}}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$

3

最小値 $\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$ $\left(a=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$　10

9 以下の問いに答えよ。ただし，必要があれば等式

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

を用いてもよい。

(1) 実数a,b,cに対して，不等式$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geqq0$を示せ。また，等号が成り立つときの$a,b,c$の条件を求めよ。

(2) 正の実数x,y,zに対して，不等式$\frac{x+y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{xyz}$を示せ。また，等号が成り立つときの$x,y,z$の条件を求めよ。

(1)

証)

$(左辺)=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq0$

等号は $a-b=0$ かつ $b-c=0$ かつ $c-a=0$

つまり $a=b=c$ の時成り立つ。//　5

(2)

証)

$a>0, b>0, c>0$とすると $a+b+c>0$である。

よって 等式において(1)より

$(左辺)=a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\geqq0$

つまり $a^3+b^3+c^3\geqq3abc$

が成り立つ。（等号は$a=b=c$の時）

$x>0, y>0, z>0$であるので $\sqrt[3]{x}>0, \sqrt[3]{y}>0, \sqrt[3]{z}>0$

である。$a=\sqrt[3]{x}, b=\sqrt[3]{y}, c=\sqrt[3]{z}$を代入すると

$(\sqrt[3]{x})^3+(\sqrt[3]{y})^3+(\sqrt[3]{z})^3\geqq3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z}$

つまり $x+y+z\geqq3\sqrt[3]{xyz}$ より $\frac{x+y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{xyz}$

が成り立つ。等号は $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z}$ つまり $x=y=z$のとき//

5　（この式は，項が3つのときの相加，相乗平均の関係）

/35