第１回定期考査(極限)Ｒ４．５．２０　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}$

$\boxed{2}$ はさみうちの原理を用いて極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{4^n-3^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n+2^n}$

$\boxed{4}$ 数列 $\left\{\dfrac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ。

(1) $r>1$　　(2) $|r|<1$

$\boxed{5}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$\boxed{6}$ 次の無限級数は収束することを示し，その和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots$$

$\boxed{7}$ 次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $3-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2^2}-\dfrac{3}{2^3}+\cdots\cdots$　　(2) $1+\sqrt{3}+3+\cdots\cdots$

$\boxed{8}$ 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$ の和を求めよ。

$\boxed{9}$ 次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

$\boxed{10}$ 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$$

$\boxed{11}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

$\boxed{12}$ 次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$

$\boxed{13}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

$\boxed{14}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}2^x$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\log_{0.5}x$

$\boxed{15}$ 方程式 $x-\cos x=0$ は，$0<x<\pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを, 中間値の定理を用いて示せ。

$\boxed{16}$ 次の無限級数が収束するときの和を $f(x)$ とおくとき，関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

$x+x(1-2x^2)+x(1-2x^2)^2+x(1-2x^2)^3+\cdots\cdots$

$\boxed{17}$ $\displaystyle f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ とする。関数 $f(x)$ がすべての実数 x で連続となるように，定数 a，b の値を定めよ。

第１回定期考査(極限)Ｒ４．５．２０　lim を書いていない △-1　かっこがない △-1　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　)

1 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}$

解答 (1) $-\infty$　(2) $\frac{2}{3}$　(3) 0　各③

解説

(1) $\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n}-3\right)=-\infty$　−3 や +∞ ミス多し

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=0$

2 はさみうちの原理を用いて極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}$ を求めよ。　解答 0　④

解説

$-1\leqq\sin\frac{n\pi}{3}\leqq 1$ より　$-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}\leqq\frac{1}{n}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}=0$$

絶対値で戦っている者のミス多し

等号ミス △-1

$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}=0$ △-1

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ は書き方として あまりよくない

3 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{4^n-3^n}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n+2^n}$

解答 (1) 1　(2) ∞　各③

解説

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{4^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\infty$

4 数列 $\left\{\frac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ。

(1) $r>1$　(2) $|r|<1$

解答 (1) -1　(2) 1　各③

解説

(1) $r>1$ のとき，$\left|\frac{1}{r}\right|<1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(2) $|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$\frac{1-0}{1+0}=0$ ミス多し

5 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

解答 2　④

$\frac{a}{1-r}$ を用いている者多し

解説

与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$　← ここから下のやり方を知らない者多し

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

その初項は，$a_1-2=1-2=-1$ であるから

$$a_n-2=(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$ △2

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

6 次の無限級数は収束することを示し，その和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots$$

解答 和は $\frac{1}{2}$　④

一般項が0に収束することを示している者がいたが，これは違う △-2

解説

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$ △2

$\frac{1}{2}$ がない者多し。

よって　$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

したがって，この無限級数は収束して，その和は $\frac{1}{2}$ である。　2や3に なっている者もいた。

7 次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $3-\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}-\frac{3}{2^3}+\cdots\cdots$　(2) $1+\sqrt{3}+3+\cdots\cdots$

解答 (1) 収束，和 2　(2) 発散　各③

公比が $-\frac{3}{2}$ や $\frac{1}{2}$ になっている者多し。

解説

公比を r とする。

(1) 初項は3，公比は $r=-\frac{1}{2}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は　△ (なければ与えない)

$$S=\frac{3}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=2$$

(2) 初項は1，公比は $r=\sqrt{3}$ で　$|r|\geqq1$

よって，この無限等比級数は発散する。　理由なし △-1

8 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$ の和を求めよ。　解答 $\frac{1}{2}$　④

解説

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ は，初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数であり，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ は，初項 $\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\frac{1}{2}\right|<1$，$\left|\frac{1}{3}\right|<1$ であるから，これらの無限等比級数はともに収束して，

それぞれの和は　なければ △-1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

よって　$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ 多し。

9 次の極限を求めよ。　$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

$\lim_{x\to0}\left(\sqrt{\frac{x+4}{x^2}}-\frac{2}{x}\right)$ というミスも多い。

解答 $\frac{1}{4}$　④

解説

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{(x+4)-2^2}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$ △2

$$=\frac{1}{4}$$

10 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$$

いきなり $a\sqrt{x}-b$ を かけている者多し。

解答 $a=4$，$b=-4$　⑤

$\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=2$ などミス多し。

解説

$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$　……①

が成り立つとする。$\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから

$\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=0$　← かっこなし △-1

よって，$a+b=0$ となり　$b=-a$　……②　△2

このとき

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}$$

$\frac{a}{2}=2$ のとき ① が成り立つから　$a=4$　△2

このとき，②から　$b=-4$　　答 $a=4$，$b=-4$

152

11 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2-1}{|x-1|}$　　(2) $\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

解答 (1) 2　(2) -2　　ろ④

解説

(1) $x>1$ のとき　$\frac{x^2-1}{|x-1|} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$

よって　$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2-1}{|x-1|} = 2$

$\lim_{x \to 1-0} -(x+1) = -2$ ヌケし。

(2) $x<1$ のとき　$\frac{x^2-1}{|x-1|} = \frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)} = -(x+1)$

よって　$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2-1}{|x-1|} = -2$

また $-(x+1)$
$= -x+1$
もヌケがった。

12 次の極限を求めよ。 $\lim_{x \to -\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$　　解答 $-\frac{1}{2}$　⑤

解説

$x=-t$ とおくと，$x \to -\infty$ のとき $t \to \infty$ であるから

$$\lim_{x \to -\infty}(\sqrt{x^2+x}+x) = \lim_{t \to \infty}(\sqrt{t^2-t}-t) = \lim_{t \to \infty}\frac{(\sqrt{t^2-t}-t)(\sqrt{t^2-t}+t)}{\sqrt{t^2-t}+t}$$

$$= \lim_{t \to \infty}\frac{(t^2-t)-t^2}{\sqrt{t^2-t}+t} = \lim_{t \to \infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t}+t}$$

ここのマイナスがない。

$$= \lim_{t \to \infty}\frac{-t}{t\sqrt{1-\frac{1}{t}}+t} = \lim_{t \to \infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}$$

△2

$$= -\frac{1}{2}$$

13 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$　　(2) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

解答 (1) 2　(2) $\frac{1}{2}$　　ろ④

解説

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \to 0}\left(2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}\right) = 2 \cdot 1 = 2$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$$= \lim_{x \to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}\right\} = 1^2 \cdot \frac{1}{1+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

△2

$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x \to 0} 1^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

△−2

14 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \to -\infty} 2^x$　　(2) $\lim_{x \to +0} \log_{0.5} x$

解答 (1) 0　(2) ∞　　ろ③

$-\infty$ ヌケし。

解説

(1) $\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$　　(2) $\lim_{x \to +0} \log_{0.5} x = \infty$

15 方程式 $x-\cos x=0$ は，$0<x<\pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを，中間値の定理を用いて示せ。

「連続する」「連続している」は あまり言わない

解説

$f(x)=x-\cos x$ とおくと，$f(x)$ は閉区間 $[0,\ \pi]$ で連続である。　⑤

また　$f(0)=0-\cos 0=-1<0$

$f(\pi)=\pi-\cos\pi=\pi+1>0$

なければ △1

π+1 になる所ヌケし。

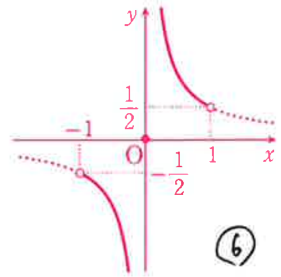
であり，$f(0)$ と $f(\pi)$ は符号が異なる。

よって，方程式 $f(x)=0$ すなわち $x-\cos x=0$ は，$0<x<\pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

16 次の無限級数が収束するときの和を $f(x)$ とおくとき，関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

$x+x(1-2x^2)+x(1-2x^2)^2+x(1-2x^2)^3+\cdots\cdots$

解答 [図]



⑥

解説

この無限級数は，初項 x，公比 $1-2x^2$ の無限等比級数である。

よって，収束するための必要十分条件は

$x=0$　または　$|1-2x^2|<1$

$x=0$ のときを忘れている。

$|1-2x^2|<1$ から　$-1<1-2x^2<1$

よって　$0<x^2<1$

ゆえに　$-1<x<0,\ 0<x<1$　△2

和 $f(x)$ については

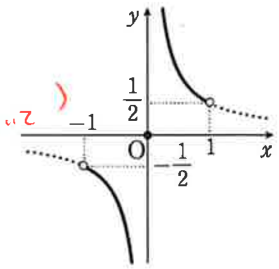
$x=0$ のとき　$f(0)=0$

$-1<x<0,\ 0<x<1$ のとき

△4 (グラフに書けていて)

$$f(x) = \frac{x}{1-(1-2x^2)} = \frac{1}{2x}$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



$\frac{x}{2x^2} = \frac{x}{2}$ ミスヌケし。

$0<x^2<1 \to 0<x<1$ ミスヌケし。

収束するときの x の範囲を考えていない。

17 $f(x)=\lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ とする。関数 $f(x)$ がすべての実数 x で連続となるように，定数 a，b の値を定めよ。

解答 $a=0,\ b=1$　⑩

解説

[1]　$-1<x<1$ のとき

$|x|<1$ より，$\lim_{n \to \infty} x^{2n}=0$ であるから

$$f(x) = \frac{0+ax^2+bx}{0+1} = ax^2+bx$$　△2

[2]　$x<-1,\ 1<x$ のとき

$\left|\frac{1}{x}\right|<1$ より，$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{x^{2n}}=0$ であるから

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^{2n-2}}+\frac{b}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}} = \frac{1}{x}$$　△2

[3]　$x=1$ のとき

$$f(1) = \frac{1+a+b}{2}$$

[4]　$x=-1$ のとき

$$f(-1) = \frac{-1+a-b}{2}$$

$f(x)$ は $x<-1$，$-1<x<1$，$1<x$ で，それぞれ連続であるから，$f(x)$ がすべての実数 x で連続であるための条件は，$x=\pm 1$ で連続であることである。

また　$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0}(ax^2+bx) = a+b$

$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x} = 1$

$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \frac{1}{x} = -1$

$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0}(ax^2+bx) = a-b$

不足していたら，この点はなし

$f(x)$ が $x=1$ で連続であるための条件は

$a+b=1=\frac{1+a+b}{2}$　△2　$\left(\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} f(x) = f(1)\right)$

すなわち　$a+b=1$　……①

$f(x)$ が $x=-1$ で連続であるための条件は

$-1=a-b=\frac{-1+a-b}{2}$　△2　$\left(\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} f(x) = f(-1)\right)$

すなわち　$a-b=-1$　……②

3つつなげる

①，② を解いて　$a=0,\ b=1$　△2 (ろ①)