第１回定期考査(数学Ｉ演習)R４．５．１９　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ $c$ は正の数とする。$a=c^3+2c^2+c$，$r=(c+1)^4$ とするとき，$\dfrac{r}{a}$ の最小値とそのときの $c$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 平面上に三角形 ABC があり，点 Q を $5\overrightarrow{\mathrm{QA}}+6\overrightarrow{\mathrm{QB}}+8\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$ を満たすようにとる。直線 AQ と直線 BC の交点を M とするとき , 三角形 ABM と三角形 AMC の面積の比 △ABM：△AMC を最も簡単な整数比で求めよ。

$\boxed{3}$ 6 個の数字 0，0，1，1，2，3 がある。これらの数字を全部使って 6 桁 (けた) の整数をつくるとき全部で何個できるか。

$\boxed{4}$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$y=2\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta-2\cos\theta-3$ とする。
また , $x=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。
(1) $y$ を $x$ の関数 として表せ。
(2) $x$ のとりうる値の範囲を求めよ。
(3) $y$ の最大値と最小値を求めよ。また , そのときの $\theta$ の値も答えよ。

$\boxed{5}$ 放物線 $y=x^2+12$ と放物線 $y=-x^2-10x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{6}$ $y\geqq2x^2$ であるときの $k=2x+3y$ の最小値と , そのときの $x$ , $y$ の値を求めよ。

$\boxed{7}$ $a_n=4n+1$ とする。

(1) $a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_na_{n+1}$ を $n$ の式で表せ。

(2) $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$ を $n$ の式で表せ。

$\boxed{8}$ 3 人の選手の100 m 走のタイムと体重は以下の表の通りである。

| | 選手1 | 選手2 | 選手3 |
|---|---|---|---|
| タイム (秒) | 12.5 | 14.0 | 15.5 |
| 体重 (kg) | 57.0 | 54.0 | 60.0 |

選手の体重と 100 m 走のタイムの相関係数を求めよ。

$\boxed{9}$ 221 以下の自然数 $n$ で，13 で割った余りが 2，17 で割った余りが 14 となるものを求めよ。

$\boxed{10}$ $n$ を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて $n$ 回投げる試行を行い，出た目を順に $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。

(1) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大公約数が 3 となる確率を $n$ の式で表せ。

(2) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大公約数が 1 となる確率を $n$ の式で表せ。

第１回定期考査(数学Ｉ演習)Ｒ４．５．１９　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

**1** $c$ は正の数とする。$a=c^3+2c^2+c$，$r=(c+1)^4$ とするとき，$\frac{r}{a}$ の最小値とそのときの $c$ の値を求めよ。

$$\frac{r}{a}=\frac{(c+1)^4}{c(c^2+2c+1)}=\frac{(c+1)^4}{c(c+1)^2}=\frac{(c+1)^2}{c}=\frac{c^2+2c+1}{c}$$

$=c+2+\frac{1}{c}$ となる。ここで $c>0$ より $\frac{1}{c}>0$　ないければ -1

相加・相乗平均の関係から

$c+\frac{1}{c}\geqq 2\sqrt{c\cdot\frac{1}{c}}$　より　$c+\frac{1}{c}+2\geqq 2\sqrt{c\cdot\frac{1}{c}}+2$

ゆえに $\frac{r}{a}\geqq 4$　また等号は $c=\frac{1}{c}$　つまり $c^2=1$

$c>0$ より $c=1$ のときである。以上より

$\frac{r}{a}$ の最小値は 4，$(c=1)$　4　4　8

相加相乗を使っていない者が -1

**2** 平面上に三角形 ABC があり，点 Q を $5\overrightarrow{QA}+6\overrightarrow{QB}+8\overrightarrow{QC}=\vec{0}$ を満たすようにとる。直線 AQ と直線 BC の交点を M とするとき，三角形 ABM と三角形 AMC の面積の比 △ABM：△AMC を最も簡単な整数比で求めよ。

$5\overrightarrow{QA}+6\overrightarrow{QB}+8\overrightarrow{QC}=\vec{0}$

$5(-\overrightarrow{AQ})+6(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AQ})+8(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AQ})=\vec{0}$

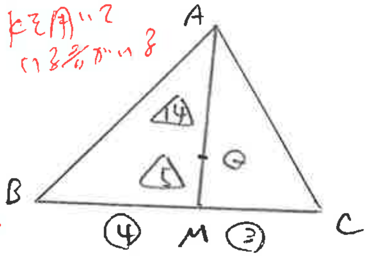
$6\overrightarrow{AB}+8\overrightarrow{AC}-19\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$　より　$\overrightarrow{AQ}=\frac{6\overrightarrow{AB}+8\overrightarrow{AC}}{19}$

変形して

$\overrightarrow{AQ}=\frac{14}{19}\times\frac{6\overrightarrow{AB}+8\overrightarrow{AC}}{14}$

$=\frac{14}{19}\cdot\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{4+3}$　4

kを用いている者が -1




AQ と BC の交点が M より

$\overrightarrow{AM}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{4+3}$，$\overrightarrow{AQ}=\frac{14}{19}\overrightarrow{AM}$

よって $BM:MC=4:3$，$AQ:QM=14:5$

BC を底辺として考えると高さが同じなので

△ABM：△AMC＝BM：MC＝4：3　8

**3** 6個の数字 0，0，1，1，2，3 がある。これらの数字を全部使って 6 桁(けた)の整数をつくるとき全部で何個できるか。

最高位 1　[1] ○○○○○　0，0，1，2，3　$\frac{5!}{2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1}=60$個　2

最高位 2　[2] ○○○○○　0，0，1，1，3　$\frac{5!}{2!2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1}=30$個　2

最高位 3　[3] ○○○○○　0，0，1，1，2　$\frac{5!}{2!2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1}=30$個　2

$60+30+30=120$個　8

**4** $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$y=2\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta-2\cos\theta-3$ とする。
また，$x=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。
(1) $y$ を $x$ の関数として表せ。
(2) $x$ のとりうる値の範囲を求めよ。
(3) $y$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの $\theta$ の値も答えよ。

答えが違うと -1
等号ミス -1

(1) $x^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\cos\theta\sin\theta$

よって $2\sin\theta\cos\theta=x^2-1$ より $y=(x^2-1)-2x-3$

$=x^2-2x-4$　4

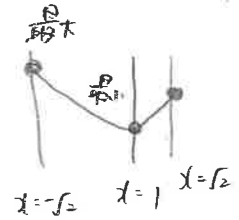
(2) $x=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$　合成していない者が -3

$0\leqq\theta<2\pi$ より $\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<2\pi+\frac{\pi}{4}$ …… (*)

よって $-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$ より $-\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

ゆえに $-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$　6

(3) $y=x^2-2x-4=(x-1)^2-5$




最小値 $-5$ $(x=1)$

最大値 $(-\sqrt{2})^2-2(-\sqrt{2})-4=2\sqrt{2}-2$ $(x=-\sqrt{2})$

$x=1$ となるのは $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$．$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(*) より $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}，\frac{3}{4}\pi$ より $\theta=0，\frac{1}{2}\pi$

$x=-\sqrt{2}$ となるのは $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$．$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1$

(*) より $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$ より $\theta=\frac{5}{4}\pi$

以上より

最大値 $2\sqrt{2}-2$ $\left(\theta=\frac{5}{4}\pi\right)$　(各2)

最小値 $-5$ $\left(\theta=0，\frac{1}{2}\pi\right)$　8

**5** 放物線 $y=x^2+12$ と放物線 $y=-x^2-10x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

交点の $x$ 座標は

$x^2+12=-x^2-10x$

$2x^2+10x+12=0$

$2(x^2+5x+6)=0$

$2(x+2)(x+3)=0$

$x=-2，-3$

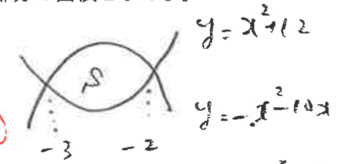
$-3\leqq x\leqq-2$ において

$y=-x^2-10x$ の方が

$y=x^2+12$ よりも上側

ゆがっこなし -1

dxなし -1




$S=\int_{-3}^{-2}\{(-x^2-10x)-(x^2+12)\}dx$　4

$=\int_{-3}^{-2}(-2x^2-10x-12)dx$

$=-2\int_{-3}^{-2}(x+2)(x+3)dx$

$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\{(-2)-(-3)\}^3$

$=\frac{1}{3}\times1^3=\frac{1}{3}$　8

$\frac{1}{6}$の公式を使おう

式がちがう者なし

**6** $y\geqq2x^2$ であるときの $k=2x+3y$ の最小値と，そのときの $x$，$y$ の値を求めよ。

$k=2x+3y$ より $3y=-2x+k$

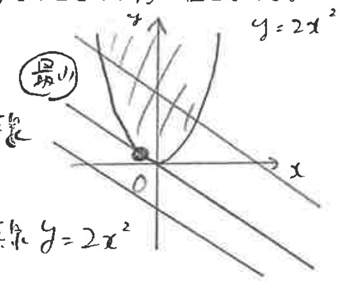
$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}k$

これは傾き $-\frac{2}{3}$，$y$ 切片 $\frac{1}{3}k$ の直線

$k$ が最小となるのは 図より

直線 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}k$ と放物線 $y=2x^2$

が接するときである。連立して




$2x^2=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}k$　判別式 $D/4=1^2-6\cdot(-k)=0$

よって $6x^2+2x-k=0$

よって $6k+1=0$ より $k=-\frac{1}{6}$

このときの重解は，解の公式より

$x=\frac{-1\pm\sqrt{0}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{0}}{6}=-\frac{1}{6}$

また $y=2\left(-\frac{1}{6}\right)^2=2\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{18}$

以上より $k$ は $x=-\frac{1}{6}$，$y=\frac{1}{18}$ のとき 最小値 $-\frac{1}{6}$ をとる

2　2　4　8

説明になっていない者 → 半分

(たとえば平方完成しているなど)

判別式＝0 もしくは微分など，接するときの記述が欲しい

/58

7 $a_n = 4n+1$ とする。

(1) $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots\cdots + a_na_{n+1}$ を $n$ の式で表せ。

(2) $\dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{a_na_{n+1}}$ を $n$ の式で表せ。

(1)
$$\sum_{k=1}^{n} a_ka_{k+1} = \sum_{k=1}^{n}(4k+1)\{4(k+1)+1\}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(4k+1)(4k+5)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(16k^2+24k+5)$$
$$= 16\sum_{k=1}^{n}k^2 + 24\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}5$$
$$= 16\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 24\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 5n$$
$$= \frac{1}{3}n\{8(n+1)(2n+1) + 36(n+1) + 15\}$$
$$= \frac{1}{3}n(16n^2+60n+59)$$
8

展開出来ている。

$\Sigma k^2 = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$ ミスあり

4

(2)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} - \cancel{\frac{1}{9}}\right) + \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{9}} - \cancel{\frac{1}{13}}\right) + \cdots + \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{4n+1}} - \frac{1}{4n+5}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4n+5}\right)$$
4

[illegible]

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{4n+5-5}{5(4n+5)} = \frac{n}{5(4n+5)}$$
8

8 3人の選手の100 m 走のタイムと体重は以下の表の通りである。

| | 選手1 | 選手2 | 選手3 |
|---|---|---|---|
| タイム (秒) | 12.5 | 14.0 | 15.5 |
| 体重 (kg) | 57.0 | 54.0 | 60.0 |

選手の体重と 100 m 走のタイムの相関係数を求めよ。

| | タイム $t$ | 体重 $w$ | $(t-\bar{t})^2$ | $(w-\bar{w})^2$ | $(t-\bar{t})(w-\bar{w})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ① | 12.5 | 57.0 | $(-1.5)^2=2.25$ | $0^2=0$ | $-1.5\times0=0$ |
| ② | 14.0 | 54.0 | $0^2=0$ | $(-3)^2=9$ | $0\times(-3)=0$ |
| ③ | 15.5 | 60.0 | $1.5^2=2.25$ | $3^2=9$ | $1.5\times3=4.5$ |
| | $\bar{t}=14$ | $\bar{w}=57$ | 和 4.5 | 和 18 | 和 4.5 |

4

(2つ求めてあれば)

相関係数 $r$ は
$$r = \frac{4.5}{\sqrt{4.5}\sqrt{18}} = \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{\frac{9}{2}}\times\sqrt{18}} = \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{9}\sqrt{9}} = \frac{1}{2} = 0.5$$
8

9 221以下の自然数 $n$ で，13で割った余りが2，17で割った余りが14となるものを求めよ。

$n = 13x+2$，$n = 17y+14$ （$x$, $y$ 整数）とおける。

$13x+2 = 17y+14$ を満たす $x$, $y$ を整数 $k$ で表す。

$13x - 17y = 12$ より，これを満たす整数解を1つ見つける。$13-17=-4$ より

$13(-1)-17(-1)=4$ よって $13(-3)-17(-3)=12$

$$\begin{array}{rl} & 13x - 17y = 12 \\ -) & 13(-3) - 17(-3) = 12 \\ \hline & 13(x+3) - 17(y+3) = 0 \end{array}$$

より $13(x+3) = 17(y+3)$

13と17は互いに素より，この式が成り立つには

$x+3 = 17k$ （このとき $y+3 = 13k$） 4

とおける。$x = 17k-3$ を $n = 13x+2$ に代入して

$$n = 13(17k-3)+2 = 221k-37$$

$n$ は221以下の自然数より

$k=0 \cdots\ n = -37$

$k=1 \cdots\ n = 221-37 = 184$

$k=2 \cdots\ n = 221\times2-37 = 221+184$

より $n = 184$ 8

（別）

$13x - 17y = 12$

mod 13 とて （$17\equiv4$, $12\equiv-1$）

$0\cdot x - 4\cdot y \equiv -1$

$-4y \equiv -1$

$\times(-3)$ $12y \equiv 3$

$-1\cdot y \equiv 3$

$\times(-1)$ $y \equiv -3$

よって整数 $k$ を用いて $y = 13k-3$.（以下同じ）

10 $n$ を2以上の自然数とする。1個のさいころを続けて $n$ 回投げる試行を行い，出た目を順に $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。

(1) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大公約数が3となる確率を $n$ の式で表せ。

(2) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大公約数が1となる確率を $n$ の式で表せ。

最大公約数を $d$ とする。

(1)

毎回3か6が出ればよい。しかし，すべて6だと $d=6$ となってしまうので，この場合を除く

3か6が出る確率は $\frac{2}{6}$ より求める確率は

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{2^n-1}{6^n}$$
5

(2)

最大公約数が $k$ になる確率を $P_k$ で表す。

(1)より $P_3 = \dfrac{2^n-1}{6^n}$ である。

さいころの目は1から6しかないので，最大公約数として考えられるのは 1, 2, 3, 4, 5, 6 の6通りである。

このうち，最大公約数が 4, 5, 6 となるのは，$n$ 回すべてがその数のときしかないので

$$P_4 = P_5 = P_6 = \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{6^n}$$

また $P_2$ について，毎回2か4か6が出ればよいが，すべて4だと最大公約数が4，すべて6だと最大公約数が6となるので，これらの場合を除く。

よって $P_2 = \left(\frac{3}{6}\right)^n - \frac{1}{6^n} - \frac{1}{6^n} = \frac{3^n-2}{6^n}$

最大公約数が1となる余事象は，最大公約数が2〜6となる場合であるので，求める確率 $P_1$ は

$$P_1 = 1 - (P_2+P_3+P_4+P_5+P_6)$$
$$= 1 - \left(\frac{3^n-2}{6^n} + \frac{2^n-1}{6^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{6^n}\right)$$
$$= 1 - \frac{3^n+2^n}{6^n} = \frac{6^n-3^n-2^n}{6^n}$$
5

/42