統一テスト（式と曲線･関数）Ｒ４．４．３０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 10 である楕円の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$ 2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$ 点 A，B の極座標を，それぞれ $\left(3,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$，$\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ とする。極 O と点 A，B を頂点とする $\triangle$OAB の面積 S を求めよ。

$\boxed{4}$ 点 C$(0,\ 3)$ から楕円 $x^2+2y^2=2$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$ 角 θ を媒介変数として，次の円，楕円を表せ。

(1)　$x^2+y^2=4$　　　(2)　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$\boxed{6}$ 次の極方程式の表す曲線を，直交座標の x，y の方程式で表せ。

$$r=2(\cos\theta+\sin\theta)$$

$\boxed{7}$ 関数 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$ のグラフをかけ。また，その定義域，値域を求めよ。

$\boxed{8}$ 次の不等式を解け。　$\dfrac{2}{x-1}<x$

$\boxed{9}$ 関数 $y=\sqrt{2x-2}$ のグラフをかけ。また，その定義域，値域を求めよ。

$\boxed{10}$ 関数 $y=\sqrt{x+2}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の座標を求めよ。

$\boxed{11}$ 関数 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ の逆関数を求めよ。

$\boxed{12}$ $a\fallingdotseq 0$ とする。関数 $f(x)=ax+b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f(2)=4$，$f^{-1}(1)=-4$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{13}$ $f(x)=x+1$，$g(x)=2^x$ について，次の合成関数を求めよ。

(1) $(g\circ f)(x)$

(2) $(f\circ g)(x)$

$\boxed{14}$ 双曲線 $9x^2-4y^2=36$ と直線 $y=mx+1$ が異なる 2 点で交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

$\boxed{15}$ $f(x)=x^2-2x+k$ $(x\geqq 1)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。$y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフが異なる 2 点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

1 2点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 10 である楕円の方程式を求めよ。

解答　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$　　6

$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$　-1

解説

求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ とおける。

焦点からの距離の和について，$2a=10$ であるから　$a=5$　3

焦点の座標について，$\sqrt{a^2-b^2}=3$ であるから

$b^2=a^2-3^2=25-9=16$

したがって，求める楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

2 2点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

解答　$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$　　6

$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ というミス多し

$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=1$ も多し

解説

焦点が x 軸上にあり，原点 O に関して対称であるから，求める直角双曲線の方程式は

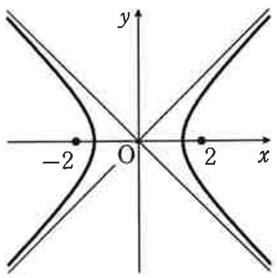
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ $(a>0)$

とおける。

焦点の座標について，$\sqrt{a^2+a^2}=2$ であるから

$a^2=2$　3

よって，求める双曲線の方程式は　$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$



3 点 A，B の極座標を，それぞれ $\left(3,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$，$\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ とする。極 O と点 A，B を頂点とする △OAB の面積 S を求めよ。

$\sin 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ミス

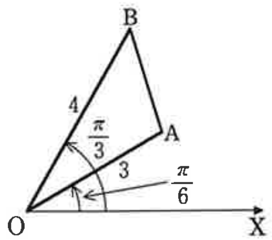
解答　3　　6

解説

$\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$　2

よって

$S=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\sin\dfrac{\pi}{6}=3$



4 点 $\mathrm{C}(0,\ 3)$ から楕円 $x^2+2y^2=2$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。

解答　$y=2x+3$，$y=-2x+3$　　6

$\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}y=2$　-1

解説

点 C を通る接線は，x 軸に垂直ではないから，その方程式は $y=mx+3$ とおくことができる。

これを楕円の式に代入すると

$x^2+2(mx+3)^2=2$

整理すると

$(2m^2+1)x^2+12mx+16=0$

この x の 2 次方程式の判別式を D とすると

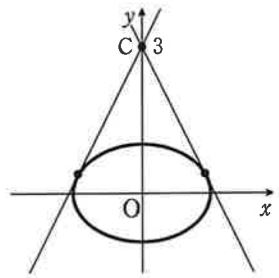
$\dfrac{D}{4}=(6m)^2-(2m^2+1)\cdot 16=4(m^2-4)$

直線が楕円に接するのは $D=0$ のときであるから

$m=\pm 2$　4

接点でもO.K.

よって，接線の方程式は　$y=2x+3$，$y=-2x+3$



5 角 θ を媒介変数として，次の円，楕円を表せ。

(1)　$x^2+y^2=4$　　　(2)　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

極方程式を求めることと間違えている

解答　(1)　$x=2\cos\theta$，$y=2\sin\theta$　4　(2)　$x=3\cos\theta$，$y=2\sin\theta$　4

解説

(1)　$x=2\cos\theta$，$y=2\sin\theta$

(2)　$x=3\cos\theta$，$y=2\sin\theta$

6 次の極方程式の表す曲線を，直交座標の x，y の方程式で表せ。

$r=2(\cos\theta+\sin\theta)$

解答　$x^2+y^2-2x-2y=0$　　6

解説

この曲線上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると

$r\cos\theta=x$，$r\sin\theta=y$，$r^2=x^2+y^2$　……①

極方程式 $r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ の両辺に r を掛けると

$r^2=2r(\cos\theta+\sin\theta)$

すなわち　$r^2=2r\cos\theta+2r\sin\theta$

これに ① を代入して r，θ を消去すると

$x^2+y^2=2x+2y$

よって　$x^2+y^2-2x-2y=0$

7 関数 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$ のグラフをかけ。また，その定義域，値域を求めよ。

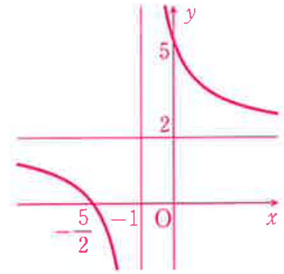
解答　図，定義域 $x\neq -1$，値域 $y\neq 2$　　7

原点，x軸，y軸なし　-1

不備　-1　(通る点を書いていないなど)

グラフの形が違うのはダメ

(漸近線がないなど)



解説

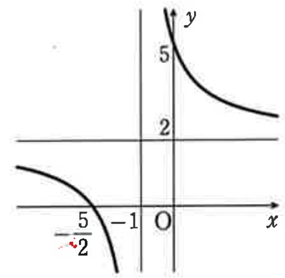
$\dfrac{2x+5}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+3}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}+2$

よって　$y=\dfrac{3}{x+1}+2$

したがって，グラフは右の図のようになる。

漸近線は，2 直線 $x=-1$，$y=2$ である。

定義域は $x\neq -1$，値域は $y\neq 2$ である。



8 次の不等式を解け。　$\dfrac{2}{x-1}<x$

場合分けをして最後に範囲をえらばない者多し

解答　$-1<x<1$，$2<x$　　6

解説

$\dfrac{2}{x-1}=x$ より　$x^2-x-2=0$

これを解くと　$x=-1,\ 2$

よって，関数 $y=\dfrac{2}{x-1}$ のグラフと直線

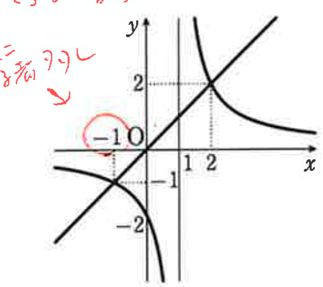
$y=x$ の共有点の座標は

$(-1,\ -1)$，$(2,\ 2)$

グラフから，不等式 $\dfrac{2}{x-1}<x$ の解は

$-1<x<1$，$2<x$

−2になる者多し



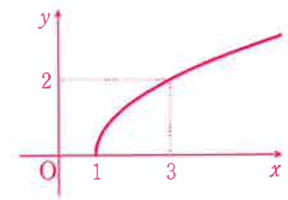
9 関数 $y=\sqrt{2x-2}$ のグラフをかけ。また，その定義域，値域を求めよ。

解答　図，定義域 $x\geqq 1$，値域 $y\geqq 0$　　7

原点，x軸，y軸なし　-1

不備　-1

(どこかの点を書いてないなど)

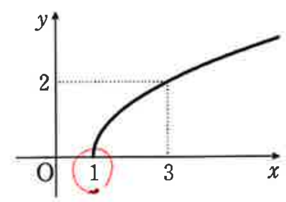


解説

変形すると　$y=\sqrt{2(x-1)}$

このグラフは，$y=\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，右の図のようになる。

定義域は $x\geqq 1$，値域は $y\geqq 0$ である。



2になる者多し

/58

10 関数 $y=\sqrt{x+2}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の座標を求めよ。

解答 $(2,\ 2)$ 6

(−1, −1) −3

解説

$\sqrt{x+2}=x$ ……①

の両辺を2乗して整理すると

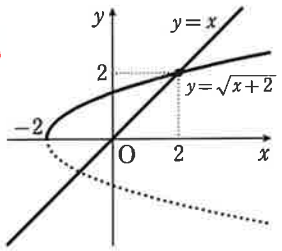
$x^2-x-2=0$

これを解くと　$x=-1,\ 2$

このうち，① を満たすのは $x=2$ で，このとき ① の両辺の値は 2 である。 3

よって，求める共有点の座標は

$(2,\ 2)$



11 関数 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ の逆関数を求めよ。

解答 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ 6

y=, にしていないとダメ

$x=\dfrac{2y+1}{y-1}$ −2

解説

$\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+1$ であるから，関数 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ の値域は $y\neq1$ である。

$y(x-2)=x+1$ より　$(y-1)x=2y+1$

ここで，$y\neq1$ であるから　$x=\dfrac{2y+1}{y-1}$

よって，求める逆関数は　$y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

12 $a\neq0$ とする。関数 $f(x)=ax+b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f(2)=4$，$f^{-1}(1)=-4$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=3$ 6

解説

$f(2)=4$ であるから　$2a+b=4$ ……①

$f^{-1}(1)=-4$ のとき $f(-4)=1$ であるから　$-4a+b=1$ ……②

①，② を解いて　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=3$

これは，$a\neq0$ を満たす。

13 $f(x)=x+1$，$g(x)=2^x$ について，次の合成関数を求めよ。

(1) $(g\circ f)(x)$　(2) $(f\circ g)(x)$

$2^{(x+1)}$ と書くもいた

指数法則がめちゃくちゃな者多し。

解答 (1) $(g\circ f)(x)=2^{x+1}$ 7　(2) $(f\circ g)(x)=2^x+1$ 3

解説

(1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=2^{x+1}$

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2^x)=2^x+1$

14 双曲線 $9x^2-4y^2=36$ と直線 $y=mx+1$ が異なる2点で交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答 $-\dfrac{\sqrt{10}}{2}<m<-\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{3}{2}<m<\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{3}{2}<m<\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 8

解説

$y=mx+1$ を $9x^2-4y^2=36$ に代入して整理すると

$(4m^2-9)x^2+8mx+40=0$ ……①

双曲線と直線が異なる2点で交わるのは，① が2次方程式であり，その判別式 D について $D>0$ が成り立つときである。

よって，$4m^2-9\neq0$ から　$m\neq\pm\dfrac{3}{2}$ ……② 2

また　$\dfrac{D}{4}=(4m)^2-(4m^2-9)\cdot40$

$=-144m^2+360=-72(2m^2-5)$

12−1 −1

$D>0$ から　$-\dfrac{\sqrt{10}}{2}<m<\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ……③ 4

② と ③ の共通範囲を求めて

$-\dfrac{\sqrt{10}}{2}<m<-\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{3}{2}<m<\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{3}{2}<m<\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

不等号の向きがちがう者多し

15 $f(x)=x^2-2x+k\ (x\geqq1)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。$y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフが異なる2点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

解答 $2\leqq k<\dfrac{9}{4}$ 10

解説

共有点の座標を $(x,\ y)$ とすると　$y=f(x)$ かつ $y=f^{-1}(x)$

$y=f^{-1}(x)$ より $x=f(y)$ であるから，次の連立方程式を考える。

$y=x^2-2x+k\ (x\geqq1)$ ……①，

$x=y^2-2y+k\ (y\geqq1)$ ……②

①−② から　$y-x=(x+y)(x-y)-2(x-y)$

したがって　$(x-y)(x+y-1)=0$

$x\geqq1$，$y\geqq1$ であるから　$x+y-1\geqq1$　ゆえに　$x=y$

よって，求める条件は，$x=x^2-2x+k$ すなわち $x^2-3x+k=0$ が $x\geqq1$ の異なる2つの実数解をもつことである。

$g(x)=x^2-3x+k$ とし，$g(x)=0$ の判別式を D とすると

[1] $D=(-3)^2-4\cdot1\cdot k=9-4k>0$ から　$k<\dfrac{9}{4}$ ……③ 4

[2] 放物線 $y=g(x)$ の軸は直線 $x=\dfrac{3}{2}$ で，$1<\dfrac{3}{2}$ である。

[3] $g(1)=1^2-3\cdot1+k\geqq0$ から　$k\geqq2$ ……④ 3

③，④ の共通範囲をとって　$2\leqq k<\dfrac{9}{4}$

(範囲を見ること)

/42