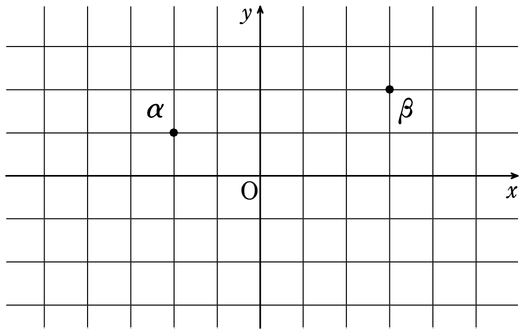
第５回定期考査(複素数平面)R４．２．２５　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 右の図の複素数平面上の点 α，β について，次の点を図に示せ。

(1) $\alpha+\beta$

(2) $\alpha-\beta$

(3) $\beta-\alpha$



$\boxed{2}$ 次の２点間の距離を求めよ。　A $(5+4i)$，B $(9+2i)$

$\boxed{3}$ 複素数 $-1+\sqrt{3}\,i$ を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$\boxed{4}$ $\alpha=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\beta=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ のとき，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$\boxed{5}$ $z=2-4i$ とする。点 z を原点を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ。

$\boxed{6}$ $(\sqrt{3}+i)^6$ を計算せよ。

$\boxed{7}$ A $(3-4i)$，B $(-2+3i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を 2：3 に内分する点 C　　(2) 線分 AB の中点 M

(3) 線分 AB を 5：4 に外分する点 D

$\boxed{8}$ 方程式 $z^3=8i$ を解け。

$\boxed{9}$ 方程式 $2|z|=|z+3|$ を満たす点 z 全体は，どのような図形か。

$\boxed{10}$ 3 点 A(1)，B$(-2+2i)$，C$(2-5i)$ に対して，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めよ。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

$\boxed{11}$ 0 でない 2 つの複素数 α，β が等式 $4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ を満たす。

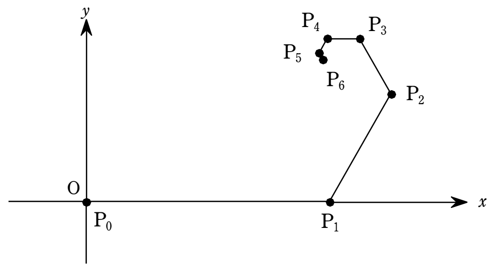
(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

(2) 複素数平面上の 3 点 0，α，β を頂点とする三角形の 3 つの角の大きさを求めよ。

$\boxed{12}$ n は自然数とする。複素数平面上に点 $P_0(0)$, $P_1(1)$, P_2 , P_3 , $\cdots$ を

$$\begin{cases}\text{半直線 } P_nP_{n+1} \text{ から半直線 } P_nP_{n-1} \text{ までの回転角が } \dfrac{2}{3}\pi \\ P_nP_{n+1}=\dfrac{1}{2}P_{n-1}P_n\end{cases}$$

となるようにとる。このとき , 点 P_n を表す複素数を求めよ。

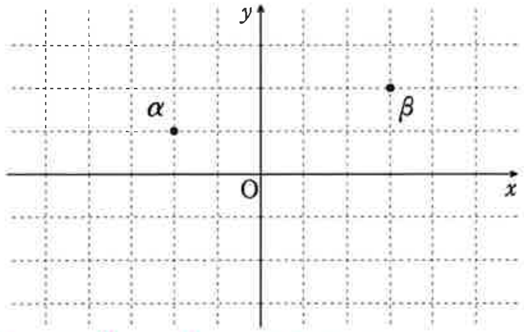


$\boxed{13}$ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき , $\dfrac{1}{1-z}$ を極形式で表せ。

ただし , 偏角は 0以上 2π 未満とする。

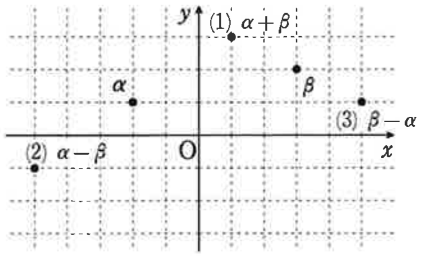
1 右の図の複素数平面上の点 α，β について，次の点を図に示せ。

(1) $\alpha+\beta$
(2) $\alpha-\beta$
(3) $\beta-\alpha$



ベクトルを書いて終わる者多し

解説



各②

$\sqrt{4^2+(-2i)^2}$ という間違い多し

2 次の２点間の距離を求めよ。　A (5+4i)，B (9+2i)

4−2i と答える者多い　−1

解答　$2\sqrt{5}$　⑤

解説

$AB=|(9+2i)-(5+4i)|=|4-2i|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

3 複素数 $-1+\sqrt{3}i$ を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

解答　$2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$　⑤

解説

$-1+\sqrt{3}i$ の絶対値を r とすると

$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2,\quad \cos\theta=-\frac{1}{2},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{2}{3}\pi$　3

よって　$-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

4 $\alpha=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，$\beta=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ のとき，$\alpha\beta$，$\frac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

解答　$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$，$\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$　各④

解説

$$\alpha\beta=2\sqrt{2}\cdot2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

2　偏角 $\frac{5}{12}\pi$　2

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

偏角 $\frac{1}{12}\pi$　2

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

2

極形式でないものはダメ

5 $z=2-4i$ とする。点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ。

$-\frac{\pi}{6}$ もずめている者　3

解答　$(\sqrt{3}+2)+(-2\sqrt{3}+1)i$　⑥

解説

$$w=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2-4i)=(\sqrt{3}+2)+(-2\sqrt{3}+1)i$$

2

6 $(\sqrt{3}+i)^6$ を計算せよ。

解答　-64　⑧

解説

2

$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ であるから

$$(\sqrt{3}+i)^6=2^6\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6=64(\cos\pi+i\sin\pi)$$　3

$$=-64$$

7 A (3−4i)，B (−2+3i) とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を 2：3 に内分する点 C　　(2) 線分 AB の中点 M

(3) 線分 AB を 5：4 に外分する点 D

解答　(1) $\frac{5-6i}{5}$　(2) $\frac{1-i}{2}$　(3) $-22+31i$　各⑤

解説

(1) $\frac{3(3-4i)+2(-2+3i)}{2+3}=\frac{5-6i}{5}$

(2) $\frac{(3-4i)+(-2+3i)}{2}=\frac{1-i}{2}$

(3) $\frac{-4(3-4i)+5(-2+3i)}{5-4}=-22+31i$

$C=\frac{5-6i}{5}$ と書く者がいる

$\left(1,-\frac{6}{5}i\right)$

という書き方の者がいる　−2

8 方程式 $z^3=8i$ を解け。

解答　$z=\sqrt{3}+i$，$-\sqrt{3}+i$，$-2i$　⑧

解説

z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ……① とすると

$$z^3=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)$$

また，$8i$ を極形式で表すと　$8i=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

極形式のまま終わる者多し

よって　$r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　$r^3=8$，$3\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$　(k は整数)

$r>0$ であるから　$r=2$　……②　2

また　$\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$

各1

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$k=0$，1，2 であるから　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$　……③

②，③ を ① に代入して，求める解は　$z=\sqrt{3}+i$，$-\sqrt{3}+i$，$-2i$　各1

−2 になる者多し

9 方程式 $2|z|=|z+3|$ を満たす点 z 全体は，どのような図形か。

解答　点 1 を中心とする半径 2 の円　⑧

解説

方程式の両辺を 2 乗すると　$4|z|^2=|z+3|^2$

よって　$4z\overline{z}=(z+3)\overline{(z+3)}$

$4z\overline{z}=(z+3)(\overline{z}+3)$

右辺を展開して整理すると　$z\overline{z}-z-\overline{z}=3$　4

式を変形すると　$(z-1)(\overline{z}-1)=4$　すなわち　$|z-1|^2=2^2$

したがって　$|z-1|=2$

これは，点 1 を中心とする半径 2 の円である。

2　2

アポロニウスの円の考えで解いてもいいが，式変形もできるように。

/69

10 3点 A(1)，B$(-2+2i)$，C$(2-5i)$ に対して，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めよ。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

$\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$ 3

考え方は逆である

解答 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ 6

解説

$\alpha=1$，$\beta=-2+2i$，$\gamma=2-5i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1-5i}{-3+2i}=\frac{(1-5i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}$$

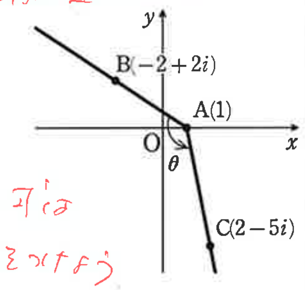
$$=-1+i \quad 3$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

← 極形式は書くくせをつけよう

よって　$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{3}{4}\pi$

絶対値ちがう (−2)



11 0でない2つの複素数 α，β が等式 $4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ を満たす。

(1) $\frac{\beta}{\alpha}$ を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

(2) 複素数平面上の3点 0，α，β を頂点とする三角形の3つの角の大きさを求めよ。

解答 (1) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，$2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$ 5

(2) $\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{6}$ (60°，90°，30°) 5

解説

(1) $\alpha\neq0$ であるから，等式の両辺を α^2 で割ると

$$4-\frac{2\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}=0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+4=0$$

よって　$\frac{\beta}{\alpha}=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot4}=1\pm\sqrt{3}i$ 3

$1+\sqrt{3}i$，$1-\sqrt{3}i$ をそれぞれ極形式で表すと

$$1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$ 各1

$$1-\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

したがって

$$\frac{\beta}{\alpha}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\ 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$ は極形式でない

(2) (1)より

$$\beta=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\alpha$$

または

$$\beta=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha$$

O(0)，A(α)，B(β) とすると，

$\beta=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\alpha$ のとき，点Bは，点Aを原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点からの距離を2倍した点である。

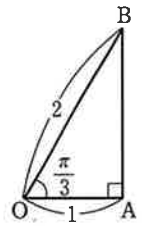
$\beta=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha$ のとき，点Bは，点Aを原点を中心として $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点からの距離を2倍した点である。

$\angle\alpha\beta 0$ や $\angle\alpha$ という書き方はおかしい。

いずれの場合も，OB=2OA であり，かつ $\angle\text{AOB}=\frac{\pi}{3}$ である。 2

したがって，$\triangle$OAB は，$\angle\text{OAB}=\frac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから，3つの角の大きさは

$$\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6} \quad (60°,\ 90°,\ 30°)$$

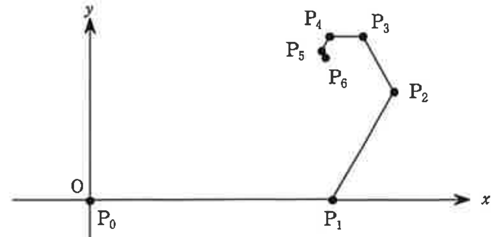


12 n は自然数とする。複素数平面上に点 $P_0(0)$，$P_1(1)$，P_2，P_3，… を

半直線 P_nP_{n+1} から半直線 P_nP_{n-1} までの回転角が $\frac{2}{3}\pi$

$P_nP_{n+1}=\frac{1}{2}P_{n-1}P_n$

となるようにとる。このとき，点 P_n を表す複素数を求めよ。

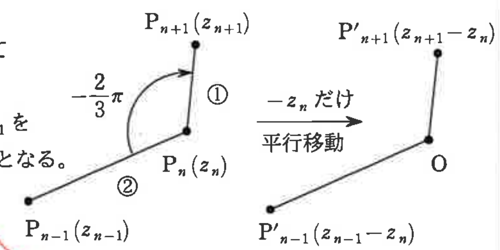


解答 $\frac{3+\sqrt{3}i}{3}\left\{1-\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{4}\right)^n\right\}$ 8

解説

P_n を表す複素数を z_n とする。

P_n が原点に移るように平行移動して P_{n-1}，P_{n+1}が移った点をそれぞれ P'_{n-1}，P'_{n+1} とすると，P'_{n-1}，P'_{n+1} を表す複素数は $z_{n-1}-z_n$，$z_{n+1}-z_n$ となる。



P'_{n-1} を原点中心に $-\frac{2}{3}\pi$ 回転させて，原点からの距離を $\frac{1}{2}$ 倍にした点が P'_{n+1} であるから

これの考え方よし

$$z_{n+1}-z_n=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}(z_{n-1}-z_n)$$ 3

が成り立つ。よって

$$z_{n+1}-z_n=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z_{n-1}-z_n)$$

$$=-\frac{1+\sqrt{3}i}{4}(z_{n-1}-z_n)=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}(z_n-z_{n-1})$$

となる。$z_{n+1}-z_n=w_n$ とおき，さらに $\alpha=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}$ とおくと $w_n=\alpha w_{n-1}$ が成り立つので，数列 $\{w_n\}$ は公比 α の等比数列である。一般項は

$$w_n=w_1\cdot\alpha^{n-1}=(z_2-z_1)\cdot\alpha^{n-1}=\alpha(z_1-z_0)\cdot\alpha^{n-1}=(1-0)\cdot\alpha^n=\alpha^n$$

となる。$z_{n+1}-z_n=w_n$ であったから，$z_{n+1}-z_n=\alpha^n$ であり

これは数列 $\{z_n\}$ の階差数列の一般項が α^n であるので，$n\geqq2$ のとき

$$z_n=z_1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k$$

$$=1+(\alpha+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^{n-1})=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha^n)$$

この式は $n=1$ のときも，$n=0$ のときも成り立つ。

ここで，$\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{3}i}{4}}$

$$=\frac{4}{4-(1+\sqrt{3}i)}=\frac{4}{3-\sqrt{3}i}\cdot\frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}=\frac{3+\sqrt{3}i}{3}$$

であるから，点 P_n を表す複素数 z_n は $z_n=\frac{3+\sqrt{3}i}{3}\left\{1-\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{4}\right)^n\right\}$

13 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。$z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき，$\frac{1}{1-z}$ を極形式で表せ。ただし，偏角は 0以上 2π 未満とする。

解答 $\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\pi-\theta}{2}+i\sin\frac{\pi-\theta}{2}\right)$ 7

解説

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$ 3

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\cdot(-i)}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right\}}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta-\pi}{2}+i\sin\frac{\theta-\pi}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\pi-\theta}{2}+i\sin\frac{\pi-\theta}{2}\right)$$

ここで，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}>0$ であるから $\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ は $\frac{1}{1-z}$ の絶対値である。

また，$\pi-0>\pi-\theta>\pi-\frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{2}>\frac{\pi-\theta}{2}>\frac{\pi}{4}$ より偏角 $\frac{\pi-\theta}{2}$ は0以上 2π 未満である。ゆえに $\frac{1}{1-z}$ の極形式は $\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\pi-\theta}{2}+i\sin\frac{\pi-\theta}{2}\right)$

/31