統一テスト(数列)R４．２．７　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 初項が 50，公差が -3 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 第何項が初めて負の数になるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また，その和を求めよ。

$\boxed{2}$ 第 4 項が 24，第 6 項が 96 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$ 初項から第 3 項までの和が 3，第 2 項から第 4 項までの和が -6 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の和を求めよ。

$$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots+n(n+2)$$

$\boxed{5}$ 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$1，3，7，13，21，\cdots\cdots$$

$\boxed{6}$ 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2+2n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{7}$ 次の和 S を求めよ。

$$S=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$\boxed{8}$ 次の和 S を求めよ。

$$S=2\cdot1+3\cdot2+4\cdot2^2+\cdots\cdots+(n+1)\cdot2^{n-1}$$

$\boxed{9}$ n を自然数とする。和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{4n}\sin\frac{k\pi}{4}$ を求めよ。

$\boxed{10}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+3$ (2) $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n$

$\boxed{11}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+2^n$$

$\boxed{12}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n+4$$

$\boxed{13}$ n を 4 以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$2^n>3n$$

$\boxed{14}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1,\ a_2=5,\ a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$$

$\boxed{15}$ 分数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の分数が入り，その分母は n，分子は 1 から n までの自然数であるとする。

$$\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \cdots\cdots$$

(1) $\dfrac{3}{10}$ は第何項か。 (2) 第 100 項を求めよ。

$\{a_n\}$ = 一般項 -1　$\sum_{k=1}^{n}$ -1

1 初項が 50，公差が -3 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 第何項が初めて負の数になるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また，その和を求めよ。

解答 (1) 第 18 項　(2) 第 17 項までの和が最大，和は 442　6　(片方3)

解説

(1) 一般項は　$a_n=50+(n-1)\cdot(-3)$　すなわち　$a_n=-3n+53$　3

$-3n+53<0$ より　$n>\dfrac{53}{3}$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=18$

よって，初めて負の数になるのは　第 18 項

(2) (1) より，第 18 項から負の数になるから，第 17 項までの和が最大となる。

その和を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot17\{2\cdot50+(17-1)\cdot(-3)\}=442$$

S_n = (nの2次式) → 最大 は不足

2 第 4 項が 24，第 6 項が 96 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 $a_n=3\cdot2^{n-1}$ または $a_n=-3(-2)^{n-1}$　6　(片方3)

解説

初項を a，公比を r とすると　$a_n=ar^{n-1}$

第 4 項が 24 であるから　$ar^3=24$　……①

第 6 項が 96 であるから　$ar^5=96$　……②

①，② より　$r^2=4$

これを解くと　$r=\pm2$　3

① から　$r=2$ のとき $a=3$，　$r=-2$ のとき $a=-3$

よって，一般項は　$a_n=3\cdot2^{n-1}$ または $a_n=-3(-2)^{n-1}$

$r>0$ としている者多し
等差と間違えている
一般項を求めていない

3 初項から第 3 項までの和が 3，第 2 項から第 4 項までの和が -6 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

解答 $a=1$，$r=-2$　6　(片方3)

一般項を求めている者多し

解説

条件から　$a+ar+ar^2=3$　……①

$ar+ar^2+ar^3=-6$　……②

② より　$r(a+ar+ar^2)=-6$

① を代入して　$3r=-6$

よって　$r=-2$

これを ① に代入すると　$a-2a+4a=3$

これを解いて　$a=1$　　答 $a=1$，$r=-2$

4 次の和を求めよ。

$$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots+n(n+2)$$

解答 $\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$　6

$\sum_{k=1}^{n} k^2+2k$　-1

解説

これは，第 k 項が $k(k+2)$ である数列の，初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$\sum_{k=1}^{n} n(n+2)$　-1

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$　3 (公式代入で)

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+6\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$$

k の式に なっている 者がいる

5 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21,\ \cdots\cdots$$

等比数列に なる者がいる

解答 $a_n=n^2-n+1$　6

解説

この数列の階差数列は　2，4，6，8，……

その一般項を b_n とすると，$b_n=2n$ である。

よって，$n\geqq2$ のとき

なければ 減点 -1

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

すなわち　$a_n=n^2-n+1$　4

初項は $a_1=1$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=n^2-n+1$

6 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2+2n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 $a_n=2n+1$　6

解説

初項 a_1 は　$a_1=S_1=1^2+2\cdot1=3$　……①　2

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

なければ 減点 -1

$$=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$$

すなわち　$a_n=2n+1$　2

① より $a_1=3$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n+1$

7 次の和 S を求めよ。

$$S=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

解答 $\dfrac{n}{2n+1}$　6

$\dfrac{1}{2}$ がない者多し

解説

恒等式

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$　$\dfrac{1}{2}$ − $\dfrac{1}{2n+1}$ 多し

より

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$　3

ここで終わる者がいる

$$=\frac{n}{2n+1}$$

約分ミス 多し

8 次の和 S を求めよ。

$$S=2\cdot1+3\cdot2+4\cdot2^2+\cdots\cdots+(n+1)\cdot2^{n-1}$$

解答 $n\cdot2^n$　6

$\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot2^{k-1}$ $=\sum_{k=1}^{n}(k+1)+\sum_{k=1}^{n}2^k$ 多し

解説

$$S=2\cdot1+3\cdot2+4\cdot2^2+\cdots\cdots+(n+1)\cdot2^{n-1}$$

両辺に 2 を掛けると

$$2S=\quad 2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots\cdots+n\cdot2^{n-1}+(n+1)\cdot2^n$$

辺々を引くと

プラスの者多し

$$S-2S=2+2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-1}-(n+1)\cdot2^n$$

よって　$-S=2+\dfrac{2\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n+1)\cdot2^n$　3

したがって　$S=(n+1)\cdot2^n-2^n=n\cdot2^n$

9 n を自然数とする。和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{4n}\sin\frac{k\pi}{4}$ を求めよ。

解答 n が奇数のとき $1+\sqrt{2}$，n が偶数のとき 0　6

場合分け してないと ×

解説

$\sum (\sin\frac{\pi}{4})k$

数列 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$：$\sin\dfrac{\pi}{4}$，$\sin\dfrac{2}{4}\pi$，$\sin\dfrac{3}{4}\pi$，$\sin\dfrac{4}{4}\pi$，$\sin\dfrac{5}{4}\pi$，……

つまり

$\left\{\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$：$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，1，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，0，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$-1$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，0，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，……

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)$ とするが いる

である。最初から 4 個ずつ区切っていくと，

「$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，1，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，0」…① と「$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，-1，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，0」…② の繰り返しである。

①の 4 つの項の和は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+0=1+\sqrt{2}$，②の 4 つの項の和は $-1-\sqrt{2}$ である。また，①と②合わせた 8 項の和は 0 である。

初項から第 $4n$ 項までの和は①，②，①，②，… という①と②が交互に現れた列の n 個目までの和である。

n が偶数のとき，最後は②で終わるので，初項から第 $4n$ 項までの和は0である。

n が奇数のとき，最後は①で終わるので，初項から第 $4n$ 項までの和は $1+\sqrt{2}$ である。

/60

10 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+3$ (2) $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$

解答 (1) $a_n=3n-1$ 3 (2) $a_n=2^{n-1}$ 3

(1)を階差で考えるなら $n \geqq 2$ が必要

解説

(1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公差 3 の等差数列であるから，一般項は

$$a_n=2+(n-1)\cdot 3$$ 2

すなわち $a_n=3n-1$

(2) 数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列であるから，一般項は

$$a_n=1\cdot 2^{n-1}$$

すなわち $a_n=2^{n-1}$ $1\cdot 2^{n-1}$ 2

11 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1, \quad a_{n+1}=a_n+2^n$$

解答 $a_n=2^n-1$ 6

解説

条件より $a_{n+1}-a_n=2^n$ 2^n −1

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が 2^n であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=1+2^n-2$$

よって $a_n=2^n-1$ 4

初項は $a_1=1$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は $a_n=2^n-1$

これなければ 3点から −1

12 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1, \quad a_{n+1}=3a_n+4$$

解答 $a_n=3^n-2$ 6

解説

漸化式を変形すると $a_{n+1}+2=3(a_n+2)$ 2

$b_n=a_n+2$ とすると $b_{n+1}=3b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1+2=1+2=3$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n-2$ より

$$a_n=3^n-2$$

$3\cdot 3^{n-1}-2$ −1

13 n を 4 以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$2^n>3n$$

解答 略 6

解説

この不等式を (A) とする。

[1] $n=4$ のとき

左辺 $=2^4=16$, 右辺 $=3\cdot 4=12$

よって，$n=4$ のとき，(A) が成り立つ。 2

[2] $k \geqq 4$ として，$n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$2^k>3k$$

が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のときの (A) の両辺の差を考えると

$$\begin{aligned}左辺-右辺&=2^{k+1}-3(k+1)=2\cdot 2^k-(3k+3)\\&>2\cdot 3k-(3k+3)\\&=3(k-1)>0\end{aligned}$$

すなわち $2^{k+1}>3(k+1)$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

[1]，[2] から，4 以上のすべての自然数 n について (A) が成り立つ。

14 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1, \quad a_2=5, \quad a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$$

解答 $a_n=2\cdot 4^{n-1}-3^{n-1}$ 6

解説

$a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$ を変形すると

$a_{n+2}-3a_{n+1}=4(a_{n+1}-3a_n)$ ……①

$a_{n+2}-4a_{n+1}=3(a_{n+1}-4a_n)$ ……② 2

① より，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は公比 4，初項 $a_2-3a_1=5-3\cdot 1=2$ の等比数列であるから

$a_{n+1}-3a_n=2\cdot 4^{n-1}$ ……③

② より，数列 $\{a_{n+1}-4a_n\}$ は公比 3，初項 $a_2-4a_1=5-4\cdot 1=1$ の等比数列であるから

$a_{n+1}-4a_n=3^{n-1}$ ……④

③−④ から $a_n=2\cdot 4^{n-1}-3^{n-1}$

15 分数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の分数が入り，その分母は n，分子は 1 から n までの自然数であるとする。

$$\frac{1}{1} \,\Big|\, \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \,\Big|\, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \,\Big|\, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} \,\Big|\, \frac{1}{5}, \cdots\cdots$$

(1) $\frac{3}{10}$ は第何項か。 (2) 第 100 項を求めよ。

解答 (1) 第 48 項 4 (2) $\frac{9}{14}$ 6

解説

(1) $\frac{3}{10}$ は第 10 群の 3 番目の数である。

第 1 群から第 9 群までに入る数の個数は $1+2+3+\cdots\cdots+9=\frac{1}{2}\cdot 9(9+1)=45$

よって，$45+3=48$ から，$\frac{3}{10}$ は 第 48 項

(2) 第 100 項が第 n 群に入る数であるとすると $\sum_{k=1}^{n-1}k<100 \leqq \sum_{k=1}^{n}k$

よって $\frac{1}{2}(n-1)n<100 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$

すなわち $(n-1)n<200 \leqq n(n+1)$

これを満たす自然数 n は $n=14$ 3

したがって，第 100 項は第 14 群に入る数である。

第 1 群から第 13 群までに入る数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+13=\frac{1}{2}\cdot 13(13+1)=91$$

$100-91=9$ から，第 100 項は第 14 群の 9 番目の数である。

したがって，第 100 項は $\frac{9}{14}$

/40