統一テスト（空間ベクトル）R４．１．８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

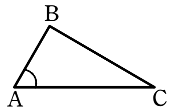
$\boxed{1}$ 平行六面体 ABCD－EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{HB}}$

$\boxed{2}$ $\vec{a}=(1,\ 2,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(-1,\ 2,\ 0)$ のとき，ベクトル $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ を成分表示せよ。また，その大きさを求めよ。

$\boxed{3}$ 3 点 A$(2,\ 1,\ -3)$，B$(-1,\ 5,\ -2)$，C$(4,\ 3,\ -1)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるとき，頂点 D の座標を求めよ。

$\boxed{4}$ 3 点 A$(1,\ 3,\ 2)$，B$(2,\ 5,\ 3)$，C$(-1,\ 5,\ 6)$ を頂点とする △ABC において，∠BAC の大きさを求めよ。



$\boxed{5}$ 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 点 $(3,\ -2,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面

(2) 2 点 A$(1,\ -2,\ 3)$，B$(-3,\ -6,\ -1)$ を直径の両端とする球面

$\boxed{6}$ 球面 $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$ と xy 平面が交わる部分は円である。その円の中心の座標と半径を求めよ。

$\boxed{7}$ 2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ -1,\ 0)$，$\vec{b}=(6,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが 3 のベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

$\boxed{8}$ 四面体 OABC において，辺 OA の中点を M，辺 BC を 1：2 に内分する点を Q，線分 MQ の中点を R とし，直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\boxed{9}$ 3 点 A(1，0，0)，B(0，2，0)，C(0，0，1) の定める平面 ABC に，原点 O から垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

$\boxed{10}$ 四面体 ABCD において，点 P は $\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}+4\overrightarrow{DP}=\vec{0}$ を満たすとする。四面体 ABCD の体積と四面体 PBCD の体積の比を求めよ。

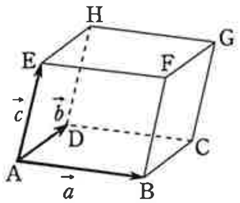
統一テスト（空間ベクトル）R4．1．8　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1 平行六面体 ABCD－EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AF}$　(2) $\overrightarrow{BD}$　(3) $\overrightarrow{CF}$　(4) $\overrightarrow{HB}$

解答　(1) $\vec{a}+\vec{c}$　(2) $-\vec{a}+\vec{b}$　(3) $-\vec{b}+\vec{c}$　(4) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$　（各3）

解説



(1) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\vec{a}+\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\vec{a}+\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=-\vec{b}+\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

2 $\vec{a}=(1,\ 2,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(-1,\ 2,\ 0)$ のとき，ベクトル $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ を成分表示せよ。また，その大きさを求めよ。

解答　順に $(-5,\ 9,\ 4)$，$\sqrt{122}$　（各3）

$\sqrt{122}=11$ とする者ダメし

解説

$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=2(1,\ 2,\ -1)-3(2,\ -1,\ -2)+(-1,\ 2,\ 0)$

$=(2-6-1,\ 4+3+2,\ -2+6+0)=(-5,\ 9,\ 4)$

また，大きさは　$|2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{(-5)^2+9^2+4^2}=\sqrt{122}$

3 3点 A(2, 1, −3)，B(−1, 5, −2)，C(4, 3, −1) がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるとき，頂点 D の座標を求めよ。

解答　$(7,\ -1,\ -2)$　8

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ など違う点を求めている

解説

頂点 D の座標を $(x,\ y,\ z)$ とする。

四角形 ABCD が平行四辺形になるのは，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ のときであるから

$(x-2,\ y-1,\ z-(-3))=(4-(-1),\ 3-5,\ -1-(-2))$

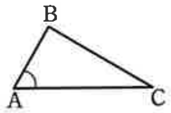
$(1,7,0)$ という間違いダメし

よって　$x-2=5$，$y-1=-2$，$z+3=1$

ゆえに　$x=7$，$y=-1$，$z=-2$　← 各△

したがって，頂点 D の座標は　$(7,\ -1,\ -2)$

4 3点 A(1, 3, 2)，B(2, 5, 3)，C(−1, 5, 6) を頂点とする △ABC において，∠BAC の大きさを求めよ。



解答　60°　10

解説

$\overrightarrow{AB}=(2-1,\ 5-3,\ 3-2)=(1,\ 2,\ 1)$，

$\overrightarrow{AC}=(-1-1,\ 5-3,\ 6-2)=(-2,\ 2,\ 4)$ であるから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-2)+2\times2+1\times4=6$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+4^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

よって　$\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{6}{\sqrt{6}\times2\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$　5

0°≦∠BAC≦180° であるから　∠BAC＝60°

cos∠BAC＝60° ダメ

5 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 点 (3, −2, 1) を中心とする半径 1 の球面

(2) 2点 A(1, −2, 3)，B(−3, −6, −1) を直径の両端とする球面

r^2 になっていたら △2

解答　(1) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$　6　(2) $(x+1)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=12$　8

解説

(1) $(x-3)^2+\{y-(-2)\}^2+(z-1)^2=1^2$

すなわち　$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$

(2) 球面の中心を C とすると，C は線分 AB の中点で，その座標は

$\left(\dfrac{1-3}{2},\ \dfrac{-2-6}{2},\ \dfrac{3-1}{2}\right)$

すなわち　$(-1,\ -4,\ 1)$　4

また，半径は線分 CA の長さに等しい。

$CA=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+\{-2-(-4)\}^2+(3-1)^2}=2\sqrt{3}$　4

よって，求める球面の方程式は

$\{x-(-1)\}^2+\{y-(-4)\}^2+(z-1)^2=(2\sqrt{3})^2$

すなわち　$(x+1)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=12$

6 球面 $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$ と xy 平面が交わる部分は円である。その円の中心の座標と半径を求めよ。

(4, −2) ダメ

解答　中心の座標 (4, −2, 0)，半径は 4　（各5）

解説

球面の方程式において，$z=0$ とすると

$(x-4)^2+(y+2)^2+(0-3)^2=5^2$

すなわち　$(x-4)^2+(y+2)^2=4^2$

この方程式は，xy 平面上では円を表す。

その中心の座標は (4, −2, 0)，半径は 4 である。

7 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ -1,\ 0)$，$\vec{b}=(6,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが 3 のベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

解答　$\vec{p}=(1,\ 2,\ -2)$，$(-1,\ -2,\ 2)$　10

解説

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{p}$ より $\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ であるから　$2x-y=0$　……①

$\vec{b}\perp\vec{p}$ より $\vec{b}\cdot\vec{p}=0$ であるから　$6x-2y+z=0$　……②

$|\vec{p}|^2=3^2$ であるから　$x^2+y^2+z^2=3^2$　……③

①，② から，y，z を x で表すと　$y=2x$，$z=-2x$

これらを ③ に代入すると　$x^2+(2x)^2+(-2x)^2=9$

整理すると　$9x^2=9$　すなわち　$x=\pm1$　5

$x=1$ のとき　$y=2$，$z=-2$

$x=-1$ のとき　$y=-2$，$z=2$

答　$\vec{p}=(1,\ 2,\ -2)$，$(-1,\ -2,\ 2)$　5

/70

8 四面体 OABC において，辺 OA の中点を M，辺 BC を 1：2 に内分する点を Q，線分 MQ の中点を R とし，直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

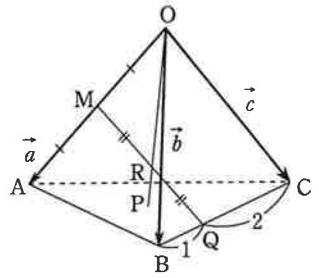
ミス

$\overrightarrow{OR}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

ナスc

解答　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$　(10)

解説



P は直線 OR 上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$

となる実数 k がある。

よって

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}=k\left(\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}k\overrightarrow{OM}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{OQ}\quad\cdots\cdots①$$

ここで

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{1+2}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$　-5

であるから，① に代入して

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right)+\frac{1}{2}k\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}\quad\cdots\cdots②$$

5

また，P は平面 ABC 上にあるから

$$\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$$

となる実数 s，t がある。

よって　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$

$$=\vec{c}+s(\vec{a}-\vec{c})+t(\vec{b}-\vec{c})$$

$$=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}\quad\cdots\cdots③$$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，$\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いた表し方はただ 1 通りである。

②，③ から　$\frac{1}{4}k=s$，$\frac{1}{3}k=t$，$\frac{1}{6}k=1-s-t$

これを解いて　$k=\frac{4}{3}$　3

これを ② に代入して　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$

別解　$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\right)$

$$=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$$

P は直線 OR 上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}\quad\cdots\cdots①$

P は平面 ABC 上にあるから　$\frac{1}{4}k+\frac{1}{3}k+\frac{1}{6}k=1$

これを解いて　$k=\frac{4}{3}$

したがって，① より　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$

9 3 点 A(1，0，0)，B(0，2，0)，C(0，0，1) の定める平面 ABC に，原点 O から垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

解答　$\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9}\right)$　(10)

解説

点 H は平面 ABC 上にあるから，

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$　……①　(s，t，u は実数)

と表される。よって

$\overrightarrow{OH}=s(1,\ 0,\ 0)+t(0,\ 2,\ 0)+u(0,\ 0,\ 1)=(s,\ 2t,\ u)$

OH⊥ 平面 ABC であるから　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

よって　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ここで　$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ 1)$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ から　$s\times(-1)+2t\times2+u\times0=0$

よって　$t=\frac{1}{4}s$　……②

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ から　$s\times(-1)+2t\times0+u\times1=0$

よって　$u=s$　……③

5

①，②，③ を解くと　$s=\frac{4}{9}$，$t=\frac{1}{9}$，$u=\frac{4}{9}$

ゆえに，$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9}\right)$ であるから，点 H の座標は　$\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9}\right)$

注意　点 P が平面 ABC 上にある

$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$ となる実数 s，t，u がある

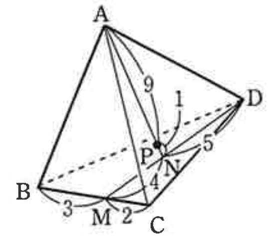
ここが $\frac{1}{9}$ に なる者 多し。

10 四面体 ABCD において，点 P は $\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}+4\overrightarrow{DP}=\vec{0}$ を満たすとする。四面体 ABCD の体積と四面体 PBCD の体積の比を求めよ。

解答　10：1　(10)

$\overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AD}}{10}$　-3

解説



$\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})+4(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD})=\vec{0}$

よって　$10\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AD}$

$$=5\times\frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}+4\overrightarrow{AD}$$

辺 BC を 3：2 に内分する点を M とすると

$$10\overrightarrow{AP}=5\overrightarrow{AM}+4\overrightarrow{AD}$$

よって　$\overrightarrow{AP}=\frac{9}{10}\times\frac{5\overrightarrow{AM}+4\overrightarrow{AD}}{9}$

すなわち，点 P は，線分 DM を 5：4 に内分する点を N とすると，線分 AN を 9：1 に内分する点となる。　5

2 つの四面体の体積の比は，△BCD を底面としたときの高さの比で，この比は AN：PN に等しい。

よって，四面体 ABCD の体積と四面体 PBCD の体積の比は　10：1

/30