統一テスト（微分法と積分法）Ｒ３．１１．８　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(2x+1)(1-x^2)$　　　(2) $y=(x-2)(x^2+2x+4)$

$\boxed{2}$ 次の極限値を求めよ。 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2-(-1)^2}{h}$

$\boxed{3}$ 関数 $y=2x^2-4x+3$ のグラフ上に点 A (2, 3) をとる。

(1) 点 A における接線の傾きを求めよ。

(2) 点 A における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=x^3+3x^2+kx$ が常に増加するように，定数 k の値の範囲を定めよ。

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ が，$x=-1$ で極大値を，$x=3$ で極小値をとるように，定数 a，b の値を定めよ。また，極値を求めよ。

$\boxed{6}$ 関数 $y=x^3-3x^2+3$ の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

$\boxed{7}$ 方程式 $x^3+3x^2=a$ が異なる 3 個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{8}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int(x+1)(x-3)\,dx$

$\boxed{9}$ 次の定積分を求めよ。 $\displaystyle\int_0^1(x^2-2x)\,dx+\int_1^3(x^2-2x)\,dx$

$\boxed{10}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t)\,dt=x^2-3x+2$$

$\boxed{11}$ 等式 $f(x)=x^2+2\int_0^1 f(t)\,dt$ が，任意の実数 x に対して成り立つとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{12}$ 放物線 $y=x^2-1$，直線 $y=x+1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{13}$ 次の定積分を求めよ。$\int_1^3 |x^2-4|\,dx$

$\boxed{14}$ 放物線 $y=x^2-2x+4$ に原点 O から 2 本の接線を引く。

(1)　2 本の接線の方程式を求めよ。

(2)　放物線と 2 本の接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{15}$ $a>0$ とする。関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{16}$ 関数 $f(x)=x^3-10x^2-25x+30$ の極大値と極小値の差を求めよ。

統一テスト（微分法と積分法）Ｒ３．１１．８　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

dx なし　-1

1 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(2x+1)(1-x^2)$　　(2) $y=(x-2)(x^2+2x+4)$

解答 (1) $y'=-6x^2-2x+2$　④　(2) $y'=3x^2$　④

解説

(1) 右辺を展開すると　$y=-2x^3-x^2+2x+1$

よって　$y'=-2\cdot 3x^2-2x+2=-6x^2-2x+2$

(2) 右辺を展開すると　$y=x^3-8$

よって　$y'=3x^2$

$x^3-8=3x^2$　-1

2 次の極限値を求めよ。$\lim_{h\to 0}\dfrac{(-1+h)^2-(-1)^2}{h}$　　解答 -2　⑤

解説

$\lim_{h\to 0}\dfrac{(-1+h)^2-(-1)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{-2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(-2+h)=-2$

かっこなし　-1　$\lim_{h\to 0}$ なし　-2

$\lim_{h\to 0}=h-2$　記述のみ

3 関数 $y=2x^2-4x+3$ のグラフ上に点 A (2, 3) をとる。

(1) 点 A における接線の傾きを求めよ。

(2) 点 A における接線の方程式を求めよ。

$f'(x)=4x-4=0$　$x=1$　間違い　ダメ

解答 (1) 4　②　(2) $y=4x-5$　③

解説

(1) $f(x)=2x^2-4x+3$ とすると，点 A における接線の傾きは $f'(2)$ である。

$f(x)$ を微分すると　$f'(x)=4x-4$

よって，求める傾きは

$f'(2)=4\cdot 2-4=4$

(2) 求める接線は点 A (2, 3) を通り，傾きが 4 の直線である。

よって，その方程式は

$y-3=4(x-2)$　すなわち　$y=4x-5$

4 関数 $f(x)=x^3+3x^2+kx$ が常に増加するように，定数 k の値の範囲を定めよ。

$k>3$ → ④

解答 $k\geqq 3$　⑤

解説

関数 $f(x)$ について，常に $f'(x)\geqq 0$ であれば，$f(x)$ は常に増加する。

$f'(x)=3x^2+6x+k=3(x+1)^2+k-3$　②

よって，$3x^2+6x+k\geqq 0$ が常に成り立つには

$k-3\geqq 0$　すなわち　$k\geqq 3$

別解　関数 $f(x)$ について，常に $f'(x)\geqq 0$ であれば，$f(x)$ は常に増加する。

$f'(x)=3x^2+6x+k$

x^2 の係数が正であるから，$3x^2+6x+k\geqq 0$ が常に成り立つのは，2 次方程式 $3x^2+6x+k=0$ の判別式 D について $D\leqq 0$ のときである。

$\dfrac{D}{4}=3^2-3\cdot k$ より　$9-3k\leqq 0$

これを解いて　②　$k\geqq 3$

5 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ が，$x=-1$ で極大値を，$x=3$ で極小値をとるように，定数 a，b の値を定めよ。また，極値を求めよ。

解答 $a=-3$，$b=-9$　$x=-1$ で極大値 6，$x=3$ で極小値 -26　⑧

解説

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ を微分すると

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ が $x=-1$ で極大値をとるとき

$f'(-1)=0$　……①

また，$x=3$ で極小値をとるとき

$f'(3)=0$　……②

①，②より

$3-2a+b=0$，$27+6a+b=0$

これを解くと　$a=-3$，$b=-9$

このとき　$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	-1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大 6	↘	極小 -26	↗

増減表がないものは　-2

したがって　$a=-3$，$b=-9$，

$x=-1$ で極大値 6，$x=3$ で極小値 -26 をとる。

6 関数 $y=x^3-3x^2+3$ の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

解答 $x=0$ で極大値 3，$x=2$ で極大値 -1，グラフは[図]　⑥

解説

$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると

$x=0$，2

y の増減表は，右のようになる。

したがって，この関数は

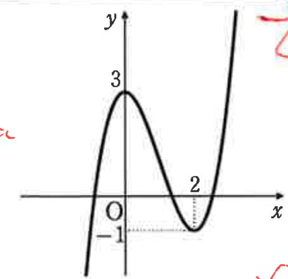
$x=0$ で極大値 3，

$x=2$ で極小値 -1　②

をとる。

また，グラフは右の図のようになる。

x	……	0	……	2	……
y'	+	0	−	0	+
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗



x, y, 原点 なし　-1

7 方程式 $x^3+3x^2=a$ が異なる 3 個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答 $0<a<4$　⑥

解説

与えられた方程式の異なる実数解の個数は，関数 $y=x^3+3x^2$ ……① のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に等しい。

関数①について

$y'=3x^2+6x=3x(x+2)$

$y'=0$ とすると　$x=0$，-2

y の増減表は，右のようになる。

よって，関数①のグラフは，右の図のようになる。

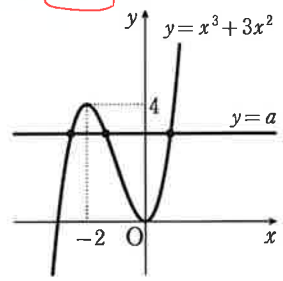
求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから

$0<a<4$

x	…	-2	…	0	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

グラフ　④　イコール　-1

増減表がない　-4



8 次の不定積分を求めよ。$\int(x+1)(x-3)dx$　　解答 $\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+C$　（C は積分定数）　④

C なし　-1

解説

C は積分定数とする。

与式 $=\int(x^2-2x-3)dx=\dfrac{x^3}{3}-2\cdot\dfrac{x^2}{2}-3x+C=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+C$

9 次の定積分を求めよ。$\int_0^1(x^2-2x)dx+\int_1^3(x^2-2x)dx$　　解答 0　⑤

$\int_0^3(2x^2-4x)dx$　ダメ

解説

与式 $=\int_0^3(x^2-2x)dx=\left[\dfrac{x^3}{3}-x^2\right]_0^3=\left(\dfrac{3^3}{3}-3^2\right)-\left(\dfrac{0^3}{3}-0^2\right)=0$

10 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$\int_a^x f(t)\,dt=x^2-3x+2$

（途中式がない）

$f(x)=2x-3$　②

$f'(x)=2x-3$　②

解答 $f(x)=2x-3$；$a=1$，2　⑥

解説

等式の両辺の関数を x で微分すると　$f(x)=2x-3$

また，与えられた等式で $x=a$ とおくと

$\int_a^a f(t)\,dt=a^2-3a+2$

すなわち　$0=a^2-3a+2$

これを解いて　$a=1$，2　　答 $f(x)=2x-3$，$a=1$，2

$a=0$ まちがい　ダメ

/58

11 等式 $f(x)=x^2+2\int_0^1 f(t)\,dt$ が，任意の実数 x に対して成り立つとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

解答 $f(x)=x^2-\dfrac{2}{3}$　⑥

解説

$\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数であるから，これを a とおくと

$$f(x)=x^2+2a \quad ……①$$

① を $\int_0^1 f(t)\,dt=a$ に代入すると

$$\int_0^1(t^2+2a)\,dt=a$$

ここで $\int_0^1(t^2+2a)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}+2at\right]_0^1=\frac{1}{3}+2a$

よって $\frac{1}{3}+2a=a$ 4

これを解いて $a=-\frac{1}{3}$

したがって $f(x)=x^2-\frac{2}{3}$

12 放物線 $y=x^2-1$，直線 $y=x+1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。 解答 $\frac{9}{2}$ 6

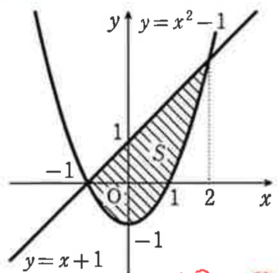
$\int_{-1}^{2}-(x^2-x-2)dx$ −1 かっこなし

解説

方程式 $x^2-1=x+1$ を解くと，

$x^2-x-2=0$ より $x=-1,\ 2$

よって，求める面積 S は，図から



$$S=\int_{-1}^{2}\{(x+1)-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$ 3
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

よって 4

参考 $S=\int_{-1}^{2}\{-(x^2-x-2)\}dx$

$$=-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3=\frac{9}{2}$$

13 次の定積分を求めよ。$\int_1^3|x^2-4|dx$ 解答 4 6

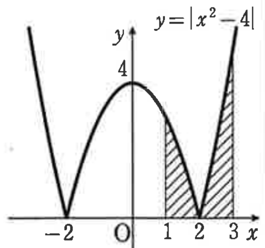
解説

関数 $y=|x^2-4|$ は

$x\le-2,\ 2\le x$ のとき $y=x^2-4$

$-2\le x\le2$ のとき $y=-x^2+4$

よって



$$\int_1^3|x^2-4|dx$$
$$=\int_1^2(-x^2+4)dx+\int_2^3(x^2-4)dx$$ 3
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3=4$$

$=\frac{2}{3}+[\frac{1}{3}x^3-4x]$ つなぎ間違いナシ

14 放物線 $y=x^2-2x+4$ に原点 O から 2 本の接線を引く。

(1) 2 本の接線の方程式を求めよ。

(2) 放物線と 2 本の接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答 (1) $y=2x,\ y=-6x$ 6 (2) $\frac{16}{3}$ 8

解説

(1) $y=x^2-2x+4$ を微分すると $y'=2x-2$

接点の座標を $(a,\ a^2-2a+4)$ とすると，接線の傾きは $2a-2$ となるから，その方程式は

$$y-(a^2-2a+4)=(2a-2)(x-a)$$

すなわち $y=(2a-2)x-a^2+4$ ……①

この直線が原点 O (0, 0) を通るから

$$0=-a^2+4$$ 3

整理すると $a^2=4$

よって $a=-2,\ 2$

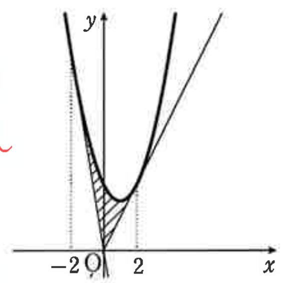
接線の方程式は，① より

$a=-2$ のとき $y=-6x$

$a=2$ のとき $y=2x$

$y=2x,\ y=-2x$ のミスナシ

(2) 求める面積は右の図から



$$\int_{-2}^{0}\{(x^2-2x+4)-(-6x)\}dx$$
$$+\int_0^2\{(x^2-2x+4)-2x\}dx$$ 2
$$=\int_{-2}^{0}(x^2+4x+4)dx+\int_0^2(x^2-4x+4)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_0^2=\frac{16}{3}$$

Sはy軸対称 → ダメ (答えのみ 2)

参考 $S=\int_{-2}^{0}(x^2+4x+4)dx+\int_0^2(x^2-4x+4)dx$

$$=\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx+\int_0^2(x-2)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^2=\frac{16}{3}$$

15 $a>0$ とする。関数 $f(x)=x^3-3a^2x\ (0\le x\le1)$ の最小値を求めよ。 3 3

解答 $0<a<1$ のとき $x=a$ で最小値 $-2a^3$，$1\le a$ のとき $x=1$ で最小値 $1-3a^2$ 6

解説

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x^2-a^2)=3(x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると $x=\pm a$

[1] $0<a<1$ のとき

$0\le x\le1$ において，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	…	a	…	1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-2a^3$	↗	$1-3a^2$

場合分け (ていねいに書かナシ)

よって，$f(x)$ は $x=a$ で最小値 $-2a^3$ をとる。 3

[2] $1\le a$ のとき

$0\le x\le1$ において，$x^2-a^2\le0$ であるから $f'(x)\le0$ 等号ミス −1

よって，$f(x)$ は $0\le x\le1$ で減少する。

ゆえに，$f(x)$ は $x=1$ で最小値 $1-3a^2$ をとる。 3

[1]，[2] から

$0<a<1$ のとき $x=a$ で最小値 $-2a^3$

$1\le a$ のとき $x=1$ で最小値 $1-3a^2$

増減表がない −2

16 関数 $f(x)=x^3-10x^2-25x+30$ の極大値と極小値の差を求めよ。

解答 $\frac{3500\sqrt{7}}{27}$ 8

$(3x-5)(x-5)$ ミスナシ

解説

$f'(x)=3x^2-20x-25$ より $f'(x)=0$ となる x は $x=\frac{10\pm5\sqrt{7}}{3}$

以下，$\alpha=\frac{10-5\sqrt{7}}{3}$，$\beta=\frac{10+5\sqrt{7}}{3}$ とする。増減表より

計算力で答えが出せれば O.K. そうでなければ見通しが必要

x	…	α	…	β	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大 $f(\alpha)$	↘	極小 $f(\beta)$	↗

ここで，多項式 $x^3-10x^2-25x+30$ を多項式 $3x^2-20x-25$ で割ると，商が $\frac{1}{3}x-\frac{10}{9}$，余りが $-\frac{350}{9}x+\frac{20}{9}$ であるので，$f(x)$ は

$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{3}x-\frac{10}{9} \\ 3x^2-20x-25 \,\big) & x^3-10x^2-25x+30 \\ & x^3-\frac{20}{3}x^2-\frac{25}{3}x \\ \hline & -\frac{10}{3}x^2-\frac{50}{3}x+30 \\ & -\frac{10}{3}x^2+\frac{200}{9}x+\frac{250}{9} \\ \hline & -\frac{350}{9}x+\frac{20}{9} \end{array}$$

$$f(x)=(3x^2-20x-25)\left(\frac{1}{3}x-\frac{10}{9}\right)+\left(-\frac{350}{9}x+\frac{20}{9}\right)$$

と変形できる。α，β は 2 次方程式 $3x^2-20x-25=0$ の 2 解であるから，$3\alpha^2-20\alpha-25=0$，$3\beta^2-20\beta-25=0$ が成り立つので

極大値 $f(\alpha)=(3\alpha^2-20\alpha-25)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{10}{9}\right)+\left(-\frac{350}{9}\alpha+\frac{20}{9}\right)=-\frac{350}{9}\alpha+\frac{20}{9}$

極小値 $f(\beta)=(3\beta^2-20\beta-25)\left(\frac{1}{3}\beta-\frac{10}{9}\right)+\left(-\frac{350}{9}\beta+\frac{20}{9}\right)=-\frac{350}{9}\beta+\frac{20}{9}$

が成り立つ。したがって，極大値と極小値の差 $f(\alpha)-f(\beta)$ は

$$f(\alpha)-f(\beta)=\left(-\frac{350}{9}\alpha+\frac{20}{9}\right)-\left(-\frac{350}{9}\beta+\frac{20}{9}\right)$$ 4
$$=-\frac{350}{9}(\alpha-\beta)$$
$$=-\frac{350}{9}\left(\frac{10-5\sqrt{7}}{3}-\frac{10+5\sqrt{7}}{3}\right)=-\frac{350}{9}\cdot\left(-\frac{10\sqrt{7}}{3}\right)=\frac{3500\sqrt{7}}{27}$$

見通しよく。途中までできていれば 4点

参考 $f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha^3-10\alpha^2-25\alpha+30)-(\beta^3-10\beta^2-25\beta+30)$

$$=(\alpha^3-\beta^3)-10(\alpha^2-\beta^2)-25(\alpha-\beta)$$
$$=(\alpha-\beta)\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-10(\alpha+\beta)-25\}$$
$$=(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-10(\alpha+\beta)-25\}$$

解と係数の関係により $\alpha+\beta=-\frac{-20}{3}=\frac{20}{3}$，$\alpha\beta=\frac{-25}{3}=-\frac{25}{3}$

また，$\alpha-\beta=\frac{10-5\sqrt{7}}{3}-\frac{10+5\sqrt{7}}{3}=-\frac{10\sqrt{7}}{3}$ より

$$f(\alpha)-f(\beta)=-\frac{10\sqrt{7}}{3}\left\{\left(\frac{20}{3}\right)^2-\left(-\frac{25}{3}\right)-10\cdot\frac{20}{3}-25\right\}=\frac{10\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{350}{9}=\frac{3500\sqrt{7}}{27}$$ 4

参考 $(f(\alpha)-f(\beta)$ の計算$)$

$$f(\alpha)-f(\beta)=\Big[f(x)\Big]_\beta^\alpha=\int_\beta^\alpha f'(x)dx=\int_\beta^\alpha 3(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=3\left\{-\frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3\right\}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{10\sqrt{7}}{3}\right)^3=\frac{3500\sqrt{7}}{27}$$ 4

/42