第３回定期考査（指数関数と対数関数）Ｒ３．９．２９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の式を計算せよ。

(1) $4^{\frac{5}{6}} \div 4^{\frac{1}{3}}$　　(2) $\sqrt{7} \times \sqrt[3]{7} \times \sqrt[6]{7}$

$\boxed{2}$ 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{9}$　　(2) $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$

$\boxed{3}$ $2^x + 2^{-x} = 4$ のとき，$4^x + 4^{-x}$，$8^x + 8^{-x}$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $8^{2x+3} = 2^{3x+5}$　　(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqq \frac{1}{8}$

$\boxed{5}$ x の方程式 $4^x - 3\cdot 2^x - 4 = 0$ について，次の問いに答えよ。

(1) $2^x = t$ とおいて得られる t の方程式を作れ。

(2) 与えられた x の方程式を解け。

$\boxed{6}$ 次の不等式を解け。　$9^x - 7\cdot 3^x - 18 < 0$

$\boxed{7}$ 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{1}{2}\log_5 3 + 3\log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24}$

(2) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

$\boxed{8}$ $\log_2 3 = a$，$\log_2 5 = b$ とするとき，次の式を a，b で表せ。

(1) $\log_2 75$　　(2) $\log_3 45$

$\boxed{9}$ 次の $\boxed{}$ に適する数を求めよ。　$9^{\log_3 4} = \boxed{}$

$\boxed{10}$ 関数 $y = \log_2(x-1)$ のグラフをかけ。

$\boxed{11}$ 方程式 $\log_3 x + \log_3(x-8) = 2$ を解け。

$\boxed{12}$ 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>2$ を解け。

$\boxed{13}$ 関数 $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^4+6$ $(1\leqq x\leqq 8)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$\boxed{14}$ $\log_2 3$ が無理数であることを証明せよ。

$\boxed{15}$ 次の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

(1) $\log_{10}5$ の値を求めよ。

(2) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{10}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

$\boxed{16}$ (1) 7^{81} は何桁の数か。ただし，$\log_{10}7=0.8451$ とする。

(2) 7^{81} の最高位の数字を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

$\boxed{17}$ $a>0$， $a\fallingdotseq 1$ とする。関数 $f(x)=a^{2x}+a^{-2x}-2(a^{1+x}+a^{1-x})$ を考える。 $t=a^x+a^{-x}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を a を用いて表せ。

第３回定期考査（指数関数と対数関数）Ｒ３．９．２９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　）

1 次の式を計算せよ。

(1) $4^{\frac{5}{6}}\div 4^{\frac{1}{3}}$　　(2) $\sqrt{7}\times\sqrt[3]{7}\times\sqrt[6]{7}$

解答 (1) 2 ③　(2) 7 ④

$\sqrt{4}$, $4^{\frac{1}{2}}$ はダメ

解説

(1) $4^{\frac{5}{6}}\div 4^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^1=2$

(2) $\sqrt{7}\times\sqrt[3]{7}\times\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{2}}\times7^{\frac{1}{3}}\times7^{\frac{1}{6}}=7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=7^1=7$

2 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{9}$　　(2) $\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}$

解答 (1) $3\sqrt[3]{2}$ ②　(2) $\sqrt[4]{3}$ ③

$\sqrt[3]{54}$ はダメ

$\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}$ $=\sqrt[4]{\frac{48}{3}}$ ミス多し

解説

(1) $\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{6\times9}=\sqrt[3]{2\times3^3}=3\sqrt[3]{2}$

(2) $\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{2^4\times3}-\sqrt[4]{3}=2\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3}$

3 $2^x+2^{-x}=4$ のとき，4^x+4^{-x}，8^x+8^{-x} の値を求めよ。

解答 $4^x+4^{-x}=14$ ③，$8^x+8^{-x}=52$ ③

公式が違う者多し

解説

$4^x+4^{-x}=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}$

$=4^2-2\cdot1=14$

$8^x+8^{-x}=2^{3x}+2^{-3x}=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot2^x\cdot2^{-x}(2^x+2^{-x})$

$=4^3-3\cdot1\cdot4=52$

別解 $8^x+8^{-x}=2^{3x}+2^{-3x}=(2^x+2^{-x})(2^{2x}-2^x\cdot2^{-x}+2^{-2x})$

$=(2^x+2^{-x})(4^x+4^{-x}-1)$

$=4\cdot(14-1)=52$

4 次の方程式，不等式を解け。

(1) $8^{2x+3}=2^{3x+5}$　　(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x\geqq\frac{1}{8}$

解答 (1) $x=-\frac{4}{3}$ ③　(2) $x\leqq\frac{3}{2}$ ③

解説

(1) 方程式を変形すると　$2^{3(2x+3)}=2^{3x+5}$

よって　$3(2x+3)=3x+5$

マイナスがない者多し

これを解いて　$x=-\frac{4}{3}$

(2) 不等式を変形すると　$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\geqq\left(\frac{1}{2}\right)^3$

底について　なければ -1

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから　$2x\leqq3$

よって　$x\leqq\frac{3}{2}$

5 x の方程式 $4^x-3\cdot2^x-4=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) $2^x=t$ とおいて得られる t の方程式を作れ。

(2) 与えられた x の方程式を解け。

解答 (1) $t^2-3t-4=0$ ③　(2) $x=2$ ③

(1) 「$=0$」がない -1

解説

(1) 方程式を変形すると　$(2^x)^2-3\cdot2^x-4=0$

$2^x=t$ とおくと，方程式は　$t^2-3t-4=0$

(2) $t^2-3t-4=0$ より　$(t+1)(t-4)=0$

$2^x>0$ すなわち $t>0$ であるから

$t=4$

よって　$2^x=4$

すなわち　$2^x=2^2$

したがって　$x=2$

6 次の不等式を解け。　$9^x-7\cdot3^x-18<0$

解答 $x<2$ ④

$0<x<2$

（$x<3$ というミス多し.）

解説

不等式を変形すると　$(3^x)^2-7\cdot3^x-18<0$

$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$t^2-7t-18<0$

$0<t<9$ を求めて　終わっている者多し.

よって　$(t+2)(t-9)<0$

$t+2>0$ であるから　$t-9<0$

すなわち　$t<9$　　ゆえに　$3^x<9$，すなわち　$3^x<3^2$

2

底3は1より大きいから　$x<2$

（$0<t<9$ 2 　$0<3^x<9$）

7 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{1}{2}\log_5 3+3\log_5\sqrt{2}-\log_5\sqrt{24}$

(2) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$

解答 (1) 0 ④　(2) 5 ④

$\log_5 2\sqrt{6}-\log_5 2\sqrt{6}=1$?

解説

(1) $\frac{1}{2}\log_5 3+3\log_5\sqrt{2}-\log_5\sqrt{24}$

$=\log_5\sqrt{3}+\log_5(\sqrt{2})^3-\log_5\sqrt{24}$

$=\log_5\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{8}}{\sqrt{24}}=\log_5 1=0$ 2

(2) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$

$=\log_2 3\cdot\log_3 4+\log_2 3\cdot\log_9 2+\log_4 9\cdot\log_3 4+\log_4 9\cdot\log_9 2$

$=\log_2 3\cdot\frac{\log_2 2^2}{\log_2 3}+\log_2 3\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 3^2}$

$+\frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}\cdot\frac{\log_2 2^2}{\log_2 3}+\frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 3^2}$

$=2+\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}=5$

別解 (2) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$

$=\left(\log_2 3+\frac{\log_2 9}{\log_2 4}\right)\left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3}+\frac{\log_2 2}{\log_2 9}\right)$

$=\left(\log_2 3+\frac{2\log_2 3}{2}\right)\left(\frac{2}{\log_2 3}+\frac{1}{2\log_2 3}\right)$

$=2\log_2 3\times\frac{5}{2\log_2 3}=5$

8 $\log_2 3=a$，$\log_2 5=b$ とするとき，次の式を a，b で表せ。

(1) $\log_2 75$　　(2) $\log_3 45$

解答 (1) $a+2b$ ③　(2) $2+\frac{b}{a}$ ③

$\left(\frac{2a+b}{a}\right)$

(1) $a+b^2$ ミス多し

(2) 底が3になっていることに気がつかない.

解説

(1) $\log_2 75=\log_2(3\times5^2)=\log_2 3+\log_2 5^2=\log_2 3+2\log_2 5=a+2b$

(2) $\log_3 45=\frac{\log_2 45}{\log_2 3}=\frac{\log_2(3^2\times5)}{\log_2 3}=\frac{\log_2 3^2+\log_2 5}{\log_2 3}=\frac{2\log_2 3+\log_2 5}{\log_2 3}$

$=2+\frac{\log_2 5}{\log_2 3}=2+\frac{b}{a}$

9 次の $\square$ に適する数を求めよ。　$9^{\log_3 4}=\square$

解答 16 ③

「$=x$」とおいている者が多い

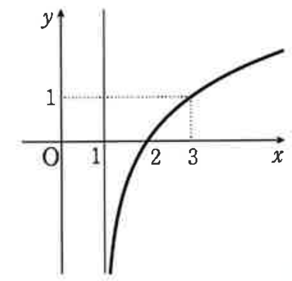
解説

$9^{\log_3 4}=(3^2)^{\log_3 4}=(3^{\log_3 4})^2=4^2=16$

よって　$9^{\log_3 4}=\boxed{16}$

10 関数 $y=\log_2(x-1)$ のグラフをかけ。

解答



④

（明らかに外れが漸近線のものはダメ）

漸近線がない -2

x，y，原点がない -1

・他のグラフを形を間違えている

・通らない点を書いている者多し

解説

$y=\log_2(x-1)$ のグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフを，x 軸方向に1だけ平行移動したものである。グラフは [図]。直線 $x=1$ が漸近線である。

11 方程式 $\log_3 x+\log_3(x-8)=2$ を解け。

解答 $x=9$ ④

多し

$x+(x-8)$

解説

真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x-8>0$

すなわち　$x>8$　……①

方程式を変形すると　$\log_3 x(x-8)=2$

$x(x-8)=2$ を解いている者がいる

よって　$x(x-8)=3^2$

式を整理すると　$x^2-8x-9=0$　すなわち　$(x+1)(x-9)=0$

①より　$x=9$

$x=-1, 9$ ②

/60

12 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>2$ を解け。

$x<\frac{5}{4}$ (のを満たす) ← おかしい

・log を 4, たるまでに 1つミスを 許して ないと ダメ (-2)

解答 $1<x<\frac{5}{4}$ 5

解説

真数正

真数は正であるから　$x-1>0$ → $x>0$ ダメ

すなわち　$x>1$　……①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ← $x-1<2^2$ ミスダメ

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから ← なければ -1

$x-1<\left(\frac{1}{2}\right)^2$　すなわち　$x<\frac{5}{4}$　……② 2

①，②の共通範囲を求めて　$1<x<\frac{5}{4}$ ← 共通範囲 とれない 者ダメ

13 関数 $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^4+6$ $(1\leqq x\leqq 8)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

平方完成が 違う者ダメ

解答 $x=1$ で最大値 6，$x=4$ で最小値 2 6

1 2 1 2

解説

$y=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+6$ $(1\leqq x\leqq 8)$

$\log_2 x=t$ とおく。

$\log_2 x$ の底 2 は 1 より大きいから，$1\leqq x\leqq 8$ のとき

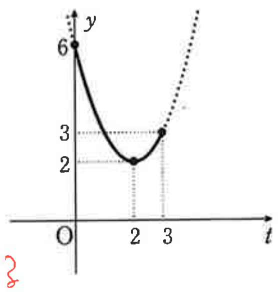
$\log_2 1\leqq \log_2 x\leqq \log_2 8$

すなわち

$0\leqq t\leqq 3$　……① ← これを求めないで $1\leqq x\leqq 8$ で グラフを 書いている

y を t の式で表すと

$y=t^2-4t+6=(t-2)^2+2$



①の範囲において，y は

$t=0$ で最大値 6，$t=2$ で最小値 2

をとる。

また，$t=0$ のとき　$\log_2 x=0$　このとき　$x=2^0=1$

$t=2$ のとき　$\log_2 x=2$　このとき　$x=2^2=4$

したがって　$x=1$ で最大値 6，$x=4$ で最小値 2

14 $\log_2 3$ が無理数であることを証明せよ。

解答 略 4

解説

$3>1$ であるから $\log_2 3>0$ である。

よって，$\log_2 3$ が無理数でない，すなわち有理数であると仮定すると，2 つの自然数 m，n を用いて $\log_2 3=\frac{m}{n}$ と表すことができる。

$2^{\frac{m}{n}}$ は偶数 というミスダメ

このとき　$2^{\frac{m}{n}}=3$　すなわち　$2^m=3^n$

この等式の左辺は偶数であるが，右辺は奇数である。

これは矛盾している。

したがって，$\log_2 3$ は無理数である。

15 次の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

(1) $\log_{10}5$ の値を求めよ。

(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

解答 (1) 0.6990 4　(2) 小数第 7 位 4

← $\log_{10}\frac{10}{2}=\frac{\log_{10}10}{\log_{10}2}$ ミスダメ

0.699 2

解説

(1) $\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2$

$=1-0.3010=0.6990$

(2) $\log_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}=10\log_{10}\frac{1}{5}=10\log_{10}5^{-1}=-10\log_{10}5$

$=-10\times 0.6990=-6.990$

$-7<\log_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}<-6$ であるから

$\log_{10}10^{-7}<\log_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}<\log_{10}10^{-6}$ ← 6 ダメ 8 も。

よって　$10^{-7}<\left(\frac{1}{5}\right)^{10}<10^{-6}$

したがって，$\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$ を小数で表したとき，小数第 7 位に初めて 0 でない数字が現れる。

16 (1) 7^{81} は何桁の数か。ただし，$\log_{10}7=0.8451$ とする。

(2) 7^{81} の最高位の数字を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答 (1) 69 桁 4　(2) 2 4

解説

(1) $\log_{10}7^{81}=81\log_{10}7=81\times 0.8451=68.4531$ ← 違っている (-2)

$68<\log_{10}7^{81}<69$ であるから　$10^{68}<7^{81}<10^{69}$ ← 68 桁ダメ

よって，7^{81} は 69 桁の数である。

(2) 7^{81} の最高位の数字を a とすると，(1) から

$a\times 10^{68}\leqq 7^{81}<(a+1)\times 10^{68}$

各辺の常用対数をとると

$\log_{10}a+68\leqq 68.4531<\log_{10}(a+1)+68$　$\log_{10}2<0.4531<\log_{10}3$ が書ければよい

したがって

$\log_{10}a\leqq 0.4531<\log_{10}(a+1)$　……①

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ であるから，$a=2$ は①を満たす。

したがって，7^{81} の最高位の数字は 2 である。

別解 (1) から　$7^{81}=10^{68.4531}=10^{68}\times 10^{0.4531}$

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ から　$\log_{10}2<0.4531<\log_{10}3$

よって　$2<10^{0.4531}<3$

したがって，7^{81} の最高位の数字は 2 である。

17 $a>0$，$a\neq 1$ とする。関数 $f(x)=a^{2x}+a^{-2x}-2(a^{1+x}+a^{1-x})$ を考える。$t=a^x+a^{-x}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を a を用いて表せ。

$t>2$ はダメ

解答 (1) $t\geqq 2$ 3

(2) $a>2$ のとき　最小値 $-a^2-2$ $\left(x=\log_a\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$

$0<a<1$，$1<a\leqq 2$ のとき　最小値 $2-4a$ $(x=0)$ 6

書いていない者ダメ

解説

(1) $a^x>0$，$a^{-x}>0$ より，相加平均・相乗平均の関係から

$a^x+a^{-x}\geqq 2\sqrt{a^x\cdot a^{-x}}$　つまり　$t\geqq 2$ が成り立つ。

等号は　$a^x=a^{-x}$　より　$x=-x$　つまり　$x=0$ のときである。

(2) $a^{2x}+a^{-2x}=(a^x)^2+(a^{-x})^2=(a^x+a^{-x})^2-2\cdot a^x\cdot a^{-x}=t^2-2$

$a^{1+x}+a^{1-x}=a\cdot a^x+a\cdot a^{-x}=a(a^x+a^{-x})=at$　より

$f(x)$ を t で表すと　$f(x)=(t^2-2)-2\cdot at=t^2-2at-2$

よって (1)より $t\geqq 2$ において $y=t^2-2at-2$ の最小値を考える

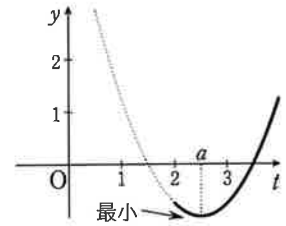
$y=(t-a)^2-a^2-2$ より，軸 $t=a$ が定義域内に入るか入らないかで場合分け

[1] $2<a$ のとき

$t=a$ で最小値 $-a^2-2$ をとる。 2

$t=a$ となるのは　$a^x+a^{-x}=a$

よって　$a^x+\frac{1}{a^x}=a$ より



両辺に a^x をかけて　$(a^x)^2-a\cdot a^x+1=0$

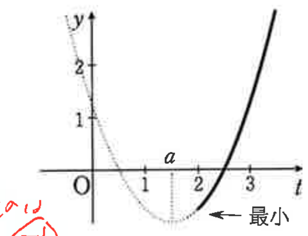
解の公式より　$a^x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$

よって　$x=\log_a\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$　のとき

[2] $0<a<1$，$1<a\leqq 2$ のとき

$t=2$ で最小値 $2-4a$ をとる。 2

$t=2$ となるのは(1)において等号が成り立つときであるから　$x=0$



$a\neq 1$ がないもの -1

以上より

$a>2$ のとき　最小値 $-a^2-2$ $\left(x=\log_a\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$

$0<a<1$，$1<a\leqq 2$ のとき　最小値 $2-4a$ $(x=0)$

/40