第２回定期考査（図形と方程式）Ｒ３．７．７　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 2 点 A $(-3,\ 2)$，B$(4,\ 5)$ を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。
(1)　2 : 1 に内分する点 C　　(2)　2 : 1 に外分する点 D　　(3)　中点 M

$\boxed{2}$ 3 点 A$(1,\ 1)$，B$(5,\ 2)$，C$(4,\ 3)$ を頂点とする △ABC の重心の座標を求めよ。

$\boxed{3}$ 3 点 A$(5,\ 3)$，B$(1,\ 2)$，C$(3,\ 1)$ について，次のものを求めよ。
(1)　直線 BC の方程式　　(2)　線分 BC の長さ
(3)　点 A と直線 BC の距離　　(4)　△ABC の面積

$\boxed{4}$ 点 A$(3,\ -1)$ を通り，直線 $3x+2y+1=0$ に垂直な直線，平行な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

$\boxed{5}$ 直線 $3x-2y-6=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 A$(-1,\ 2)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

$\boxed{6}$ 3 直線 $x-2y+9=0$，$3x+y-1=0$，$ax-y+5=0$ が三角形を作らないとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{7}$ 次のような円の方程式を求めよ。
(1)　中心が原点，半径が 7　　(2)　中心が点$(-2,\ 1)$ で，y 軸に接する円

$\boxed{8}$ 円 $x^2+y^2=10$ 上の点 P$(3,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。

9 点 A (2, 1) から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

10 円 $x^2+y^2-2x-4y-3=0$ と直線 $x+2y-5=0$ の 2 つの交点と点 (3, 2) を通る円の方程式を求めよ。

11 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $3x-5y+15>0$ (2) $x^2+y^2-4x+2y+1\geqq 0$

12 原点 O からの距離と，点 A (3, 0) からの距離の比が 2 : 1 である点 P の軌跡を求めよ。

13 x, y が 4 つの不等式 $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $x+3y\leqq 5$, $3x+2y\leqq 8$ を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

14 2 円 C_1 : $x^2+y^2+ax+by+c=0$, C_2 : $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ について考える。

$$(x^2+y^2+ax+by+c)-(x^2+y^2+dx+ey+f)=0 \quad \cdots(※)$$

で表される図形について， C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるとき，(※)は C_1 と C_2 の交点を通る直線を表す。 C_1 と C_2 が互いに外部にあるとき，(※)は何を表すか。次の□を埋めよ。

□ が等しい点の集まりを表す。

1 2点 A$(-3,\ 2)$，B$(4,\ 5)$ を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。
(1) 2：1に内分する点 C　(2) 2：1に外分する点 D　(3) 中点 M

解答 (1) $\left(\frac{5}{3},\ 4\right)$　(2) $(11,\ 8)$　(3) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right)$　4　4　4

ミス多し

解説
(1) 内分点 C の座標は
$\left(\frac{1\times(-3)+2\times4}{2+1},\ \frac{1\times2+2\times5}{2+1}\right)$ より　$\left(\frac{5}{3},\ 4\right)$
(2) 外分点 D の座標は
$\left(\frac{-1\times(-3)+2\times4}{2-1},\ \frac{-1\times2+2\times5}{2-1}\right)$ より　$(11,\ 8)$
(3) 中点 M の座標は
$\left(\frac{-3+4}{2},\ \frac{2+5}{2}\right)$ より　$\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right)$

2 3点 A$(1,\ 1)$，B$(5,\ 2)$，C$(4,\ 3)$ を頂点とする △ABC の重心の座標を求めよ。

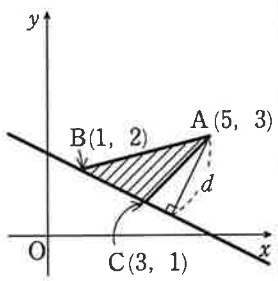
公式を用いていない者多い

解答 $\left(\frac{10}{3},\ 2\right)$　4
解説
$\left(\frac{1+5+4}{3},\ \frac{1+2+3}{3}\right)$ より　$\left(\frac{10}{3},\ 2\right)$

3 3点 A$(5,\ 3)$，B$(1,\ 2)$，C$(3,\ 1)$ について，次のものを求めよ。
(1) 直線 BC の方程式　(2) 線分 BC の長さ
(3) 点 A と直線 BC の距離　(4) △ABC の面積

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$　$\frac{6}{5}\sqrt{5}$

解答 (1) $x+2y-5=0$　(2) $\sqrt{5}$　(3) $\frac{6}{\sqrt{5}}$　(4) 3　4　4　4　4
解説
(1) 直線 BC の方程式は　$y-2=\frac{1-2}{3-1}(x-1)$
すなわち　$x+2y-5=0$
(2) $BC=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$
(3) 点 A と直線 BC の距離を d とすると
$d=\frac{|5+2\cdot3-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$
(4) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{6}{\sqrt{5}}=3$



別解あり

(1)を間違えて
(3).(4)をそのまま間違える者多し

分母に
点の座標を
入れている者がいる

$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$

2

(3). 直線の式を
簡単にしてから
用いることをしていない

4 点 A$(3,\ -1)$ を通り，直線 $3x+2y+1=0$ に垂直な直線，平行な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

$y=\frac{2}{3}x-3$　$y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$

解答 垂直な直線 $2x-3y-9=0$，平行な直線 $3x+2y-7=0$　3　3
解説
$3x+2y+1=0$ ……① とする。
直線①の傾きは　$-\frac{3}{2}$
直線①に垂直な直線の傾きを m とすると
$-\frac{3}{2}m=-1$ より　$m=\frac{2}{3}$
よって，点 $(3,\ -1)$ を通り，直線①に垂直な直線の方程式は
$y-(-1)=\frac{2}{3}(x-3)$　すなわち　$2x-3y-9=0$
直線①に平行な直線の傾きは　$-\frac{3}{2}$
よって，点 $(3,\ -1)$ を通り，直線①に平行な直線の方程式は
$y-(-1)=-\frac{3}{2}(x-3)$　すなわち　$3x+2y-7=0$

直線の式で
$-2x+3y+9=0$
など，マイナスから
始まるのは
あまり良くない。

$\frac{2}{3}x-y-3=0$
もあまり良くない。

別解 点 $(3,\ -1)$ を通り，直線 $3x+2y+1=0$ に垂直な直線の方程式は
$2(x-3)-3\{y-(-1)\}=0$　すなわち　$2x-3y-9=0$
点 $(3,\ -1)$ を通り，直線 $3x+2y+1=0$ に平行な直線の方程式は
$3(x-3)+2\{y-(-1)\}=0$　すなわち　$3x+2y-7=0$

5 直線 $3x-2y-6=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 A$(-1,\ 2)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

できが大変悪い。

解答 $(5,\ -2)$　6
解説
点 B の座標を $(p,\ q)$ とする。
[1] 直線 ℓ の傾きは $\frac{3}{2}$，直線 AB の傾きは $\frac{q-2}{p-(-1)}=\frac{q-2}{p+1}$ である。
AB⊥ℓ であるから
$\frac{3}{2}\cdot\frac{q-2}{p+1}=-1$
すなわち　$2p+3q-4=0$ ……①
[2] 線分 AB の中点 $\left(\frac{p-1}{2},\ \frac{q+2}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから
$3\cdot\frac{p-1}{2}-2\cdot\frac{q+2}{2}-6=0$
すなわち　$3p-2q-19=0$ ……②
①，②を連立させた方程式を解くと　$p=5$，$q=-2$
したがって，点 B の座標は　$(5,\ -2)$

4

別解あり

6 3直線 $x-2y+9=0$，$3x+y-1=0$，$ax-y+5=0$ が三角形を作らないとき，定数 a の値を求めよ。

解答 $a=-3,\ \frac{1}{2},\ 1$　6（含2）

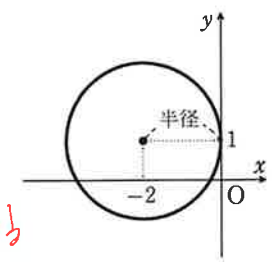
どれかのパターンを
忘れている

解説
$x-2y+9=0$ ……①，$3x+y-1=0$ ……②，$ax-y+5=0$ ……③ とする。
3直線①，②，③が三角形を作らないのは，①，②，③のどれか2つが平行である場合，
または，①，②，③が1点で交わる場合である。
直線①の傾きは　$\frac{1}{2}$，直線②の傾きは　-3，直線③の傾きは　a
よって，2直線①，②は平行でないから，3直線①，②，③が三角形を作らないのは，
次の[1]，[2]のどちらかの場合である。
[1] 直線③が直線①または②と平行の場合
直線①と平行になるとき　$a=\frac{1}{2}$
直線②と平行になるとき　$a=-3$
[2] 3直線①，②，③が1点で交わる場合
2直線①，②の交点の座標を求めると　$(-1,\ 4)$
直線③が点 $(-1,\ 4)$ を通るとき　$a\cdot(-1)-4+5=0$
よって　$a=1$
以上から，求める a の値は　$a=-3,\ \frac{1}{2},\ 1$

7 次のような円の方程式を求めよ。
(1) 中心が原点，半径が7　(2) 中心が点 $(-2,\ 1)$ で，y 軸に接する円

解答 (1) $x^2+y^2=49$　(2) $(x+2)^2+(y-1)^2=4$　4　6
解説
(1) $x^2+y^2=7^2$　すなわち　$x^2+y^2=49$
(2) y 軸に接するとき，中心 $(-2,\ 1)$ と y 軸の距離
2が半径に等しい。
よって，求める円の方程式は
$\{x-(-2)\}^2+(y-1)^2=2^2$
すなわち　$(x+2)^2+(y-1)^2=4$

(2)
半径が
1になる
者がいる



8 円 $x^2+y^2=10$ 上の点 P$(3,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。

解答 $3x+y=10$　5
解説
$3x+1\cdot y=10$　すなわち　$3x+y=10$

公式を用いる
$d=r$ など
用いて求めているが
それは時間の
無駄である

62

9 点 A(2, 1) から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

$y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$

解答 接線 $y=1$，接点 $(0,\ 1)$；接線 $4x-3y=5$，接点 $\left(\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$ ② ① ② ①

解説
接点を P$(p,\ q)$ とすると，P は円上にあるから
$p^2+q^2=1$ …… ①
また，P における円の接線の方程式は
$px+qy=1$ …… ②
で，この直線が点 A(2, 1) を通るから
$2p+q=1$ …… ③
①，③ から q を消去して整理すると　$5p^2-4p=0$
これを解くと　$p=0,\ \frac{4}{5}$
③ に代入して
$p=0$ のとき $q=1$，$p=\frac{4}{5}$ のとき $q=-\frac{3}{5}$
よって，接線の方程式 ② と接点 P の座標は，次のようになる。
$0\cdot x+1\cdot y=1$ から　接線 $y=1$，接点 $(0,\ 1)$
$\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y=1$ から　接線 $4x-3y=5$，接点 $\left(\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$

$y-1=\frac{q-1}{p-2}(x-2)$ としている者がいる
でき方が悪い。
別解あり
接線の式を求め忘れている者多し。
答えが $y=1$ のみになっている者あり

10 円 $x^2+y^2-2x-4y-3=0$ と直線 $x+2y-5=0$ の 2 つの交点と点 (3, 2) を通る円の方程式を求めよ。

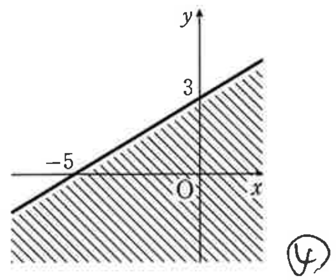
でき方が悪い
交点を求めている者多し。

解答 $x^2+y^2=13$ 6

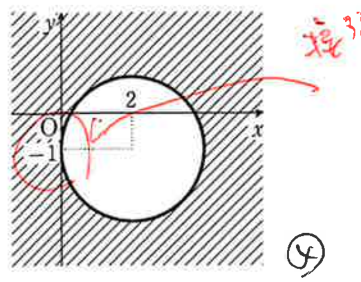
解説
k を定数として，$k(x+2y-5)+x^2+y^2-2x-4y-3=0$ …… ①
とすると，① は円と直線の交点を通る図形を表す。
① が点 (3, 2) を通るとき，① に $x=3$，$y=2$ を代入して　$2k-4=0$
よって　$k=2$ 3
これを ① に代入して整理すると　$x^2+y^2=13$

11 次の不等式の表す領域を図示せよ。
(1) $3x-5y+15>0$　(2) $x^2+y^2-4x+2y+1\geqq 0$

解説
(1) $3x-5y+15>0$ から　$y<\frac{3}{5}x+3$ ← この式が求められない
よって，求める領域は，直線 $y=\frac{3}{5}x+3$ の下側の部分で，図の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。
(2) $x^2+y^2-4x+2y+1\geqq 0$ から　$(x-2)^2+(y+1)^2\geqq 4$ 2
よって，求める領域は，円 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ およびその外部で，図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

(1)


4

(2)


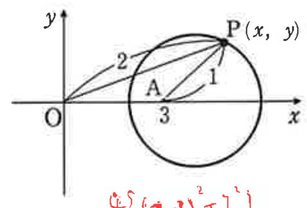
4

・領域が違う者多し
・式は正しくても 図が違う者多し
・x,y，原点ないもの −1
境界について記載なければ −1
(2) 中心原点の円を書く者がいる

12 原点 O からの距離と，点 A(3, 0) からの距離の比が 2 : 1 である点 P の軌跡を求めよ。

解答 点 (4, 0) を中心とする半径 2 の円 6

解説
点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。
P に関する条件は
OP : AP = 2 : 1
これより　2AP = OP
すなわち　$4AP^2=OP^2$
$AP^2=(x-3)^2+y^2$，$OP^2=x^2+y^2$
を代入すると　$4\{(x-3)^2+y^2\}=x^2+y^2$ 3
整理すると　$x^2-8x+y^2+12=0$ すなわち　$(x-4)^2+y^2=2^2$
したがって，点 P は円 $(x-4)^2+y^2=2^2$ 上にある。
逆に，この円上のすべての点 P$(x,\ y)$ は，条件を満たす。
よって，求める軌跡は，点 (4, 0) を中心とする半径 2 の円である。



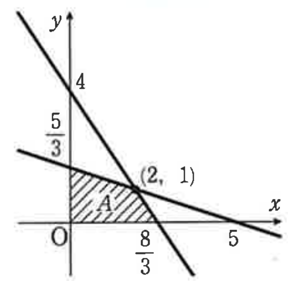
与$(x-3)^2+y^2=x^2+y^2$ から 計算ミス 多し

13 x，y が 4 つの不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+3y\leqq 5$，$3x+2y\leqq 8$ を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

解答 $x=2$，$y=1$ のとき最大値 3
$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0　それぞれ 3

(x と y の値をかいてなければ それぞれ −1)

解説
与えられた連立不等式の表す領域を A とする。
領域 A は 4 点
$(0,\ 0)$，$\left(\frac{8}{3},\ 0\right)$，$(2,\ 1)$，$\left(0,\ \frac{5}{3}\right)$
を頂点とする四角形の周および内部である。
$x+y=k$ …… ①
とおくと，$y=-x+k$ であり，これは傾きが -1，y 切片が k である直線を表す。
この直線 ① が領域 A と共有点をもつときの k の値の最大値，最小値を求めればよい。
領域 A においては，直線 ① が
点 (2, 1) を通るとき k は最大で，そのとき　$k=3$
点 (0, 0) を通るとき k は最小で，そのとき　$k=0$
である。
したがって，$x+y$ は
$x=2$，$y=1$ のとき最大値 3 をとり，
$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0 をとる。



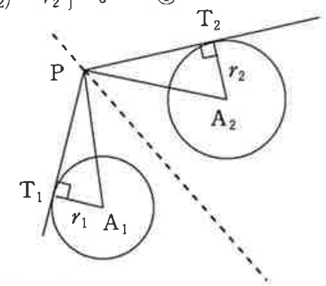
図がない者多し
交点 (2, 1) が求められない者多し
最大値 などに座標を答える者がいる

14 2 円 $C_1: x^2+y^2+ax+by+c=0$，$C_2: x^2+y^2+dx+ey+f=0$ について考える。
$(x^2+y^2+ax+by+c)-(x^2+y^2+dx+ey+f)=0$ …(※)
で表される図形について，C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるとき，(※)は C_1 と C_2 の交点を通る直線を表す。C_1 と C_2 が互いに外部にあるとき，(※)は何を表すか。次の□を埋めよ。

□ が等しい点の集まりを表す。

解答 それぞれの円に引いた接線の長さが等しい点の集まり 6

解説
C_1 の中心を $A_1(x_1, y_1)$ 半径を r_1，C_2 の中心を $A_2(x_2, y_2)$ 半径を r_2 とする。すると
$C_1: (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1{}^2$，$C_2: (x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2{}^2$ と表されるので，(※)は
$\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-r_1{}^2\}-\{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2-r_2{}^2\}=0$ …①
と表される。点 P(x, y) とすると①は
$(PA_1{}^2-r_1{}^2)-(PA_2{}^2-r_2{}^2)=0$ …②
となる。P から C_1，C_2 に引いた接線の接点を
それぞれ T_1，T_2 とすると，三平方の定理より
$PA_1{}^2=PT_1{}^2+r_1{}^2$，$PA_2{}^2=PT_2{}^2+r_2{}^2$
が成り立つので，②は
$PT_1{}^2-PT_2{}^2=0$
つまり，$PT_1{}^2=PT_2{}^2$　より $PT_1>0$，$PT_2>0$ から　$PT_1=PT_2$
が成り立つから，点Pはそれぞれの円に引いた接線の長さが等しい点の集まりである。
逆に，この図形上のすべての点 P$(x,\ y)$ は，条件を満たす。
以上より，(※)はそれぞれの円に引いた接線の長さが等しい点の集まりである。



参考 この(※)を根軸という。

2つの円の中心からの距離が等しい → 中心を結んだ線分の垂直二等分線
円からの距離が等しい → どこ？
原点からの距離が等しい → 原点中心の円
接線の距離が等しい → 接線の距離って何？

「2円の式で引き算すれば交点を通る直線が求められる」
という訳ではないメッセージです。

2円が異なる2点で交わるときも，(※)は
それぞれの円に引いた接線の長さが等しい
点の集まりとなります → 動画

38