第１回定期考査（式と証明）Ｒ３．５．２１　　(　)組(　)番　名前(　　　　　　)

$\boxed{1}$ $(2a+b)^3$ を展開せよ。

$\boxed{2}$ $125x^3+64y^3$ を因数分解せよ。

$\boxed{3}$ $x-\dfrac{1}{x}=2$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　　(2)　$x^3-\dfrac{1}{x^3}$

$\boxed{4}$ a^6-26a^3-27 を因数分解せよ。

$\boxed{5}$ $(3x-2)^5$ の展開式において，x^2 の項の係数を求めよ。

$\boxed{6}$ $(x^2+2x-1)^8$ の展開式において，x^5 の項の係数を求めよ。

$\boxed{7}$ x^3-2x^2-4x+8 を B で割ると，商が $x+1$，余りが $-5x+4$ となる整式B を求めよ。

$\boxed{8}$ 次の式を計算せよ。　$\dfrac{x^2-2x}{x^2-x-12}\div\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}$

$\boxed{9}$ 次の式を計算せよ。　$\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{2}{x^2-1}$

$\boxed{10}$ 次の式を計算せよ。

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}$$

$\boxed{11}$ 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$ax(x+1)+bx(x-1)+c(x+1)(x-1)=2x^2+3x-1$$

$\boxed{12}$ 次の等式を証明せよ。　$(a+2b)^2+(2a-b)^2=5(a^2+b^2)$

$\boxed{13}$ $a+b+c=0$ のとき，等式 $a^3+b^3+c^3=3abc$ を証明せよ。

$\boxed{14}$ 不等式 $x^2+2xy+2y^2 \geqq 0$ を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

$\boxed{15}$ $a>0$，$b>0$ とする。不等式 $2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$ を証明せよ。

$\boxed{16}$ 4 と 9の相加平均と相乗平均をそれぞれ求めよ。

$\boxed{17}$ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=2$ のとき，次の式の値を求めよ。　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$

$\boxed{18}$ 不等式 $|a|+|b| \geqq |a+b|$ を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

$\boxed{19}$ $a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right) \geqq 9$ を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

$\boxed{20}$ x が 0 以上の実数であるとき，関数 $f(x)=\dfrac{x^4-2x^3-x^2+2x+34}{x^2-x+3}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

第１回定期考査（式と証明）Ｒ３．５．２１　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

1 $(2a+b)^3$ を展開せよ。　解答 $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$　4

解説

与式 $=(2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot b+3\cdot 2a\cdot b^2+b^3$

$=8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$

$8a^3+4a^2b+2ab^2+b^3$ ミス

2 $125x^3+64y^3$ を因数分解せよ。　解答 $(5x+4y)(25x^2-20xy+16y^2)$　4

解説

与式 $=(5x)^3+(4y)^3$

$=(5x+4y)\{(5x)^2-5x\cdot 4y+(4y)^2\}$

$=(5x+4y)(25x^2-20xy+16y^2)$

$(5x+4y)(5x-4y)^2$ になるミス

$(5x+4y)(25x^2+20xy+16y^2)$ ミス

3 $x-\dfrac{1}{x}=2$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}$

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}$ マイナスになる者多し

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3-3xy\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ ミス多し

解答 (1) 6 4　(2) 14 4

解説

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}=2^2+2\cdot1=6$

(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3-3x\left(-\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=2^3+3\cdot1\cdot2=14$

別解 $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=2(6+1)=14$

4 a^6-26a^3-27 を因数分解せよ。　解答 $(a+1)(a-3)(a^2-a+1)(a^2+3a+9)$　5

解説

与式 $=(a^3)^2-26a^3-27=(a^3+1)(a^3-27)$　2

$=(a+1)(a^2-a+1)(a-3)(a^2+3a+9)$

$=(a+1)(a-3)(a^2-a+1)(a^2+3a+9)$

← a^2+6a+9 ミス

5 $(3x-2)^5$ の展開式において，x^2 の項の係数を求めよ。　解答 -720　5

解説

展開式の一般項は

${}_5C_r(3x)^{5-r}(-2)^r={}_5C_r\,3^{5-r}(-2)^r x^{5-r}$

$5-r=2$ とすると　$r=3$

よって，求める係数は

${}_5C_3\times3^2\times(-2)^3={}_5C_2\times3^2\times(-2)^3$

$=10\times9\times(-8)=-720$

マイナスない者　展開している者もいる

かっこない者多し

6 $(x^2+2x-1)^8$ の展開式において，x^5 の項の係数を求めよ。　解答 112　6

解説

展開式の一般項は

$\dfrac{8!}{p!q!r!}(x^2)^p(2x)^q(-1)^r=\dfrac{8!}{p!q!r!}\cdot2^q(-1)^r x^{2p+q}$

ただし　$p+q+r=8$，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

x^5 の項は $2p+q=5$ ……① のときである。

$p\geqq0$，$q\geqq0$ であるから，このとき，$p=0$，1，2 であり，

$p=0$ のとき　$q=5$

$p=1$ のとき　$q=3$

$p=2$ のとき　$q=1$

よって，① と $p+q+r=8$ を満たす負でない整数 p，q，r の組は

$(p,\ q,\ r)=(0,\ 5,\ 3)$，$(1,\ 3,\ 4)$，$(2,\ 1,\ 5)$　3

したがって，求める係数は

$\dfrac{8!}{0!5!3!}\cdot2^5(-1)^3+\dfrac{8!}{1!3!4!}\cdot2^3(-1)^4+\dfrac{8!}{2!1!5!}\cdot2^1(-1)^5$

$=-1792+2240-336=112$

p=0を考えていない者多し

7 x^3-2x^2-4x+8 を B で割ると，商が $x+1$，余りが $-5x+4$ となる整式 B を求めよ。

解答 x^2-3x+4　5

解説

条件から，次の等式が成り立つ。

$x^3-2x^2-4x+8=B\times(x+1)-5x+4$

整理すると

$x^3-2x^2+x+4=B\times(x+1)$

よって，x^3-2x^2+x+4 は $x+1$ で割り切れて，その商が B である。

右の計算により

$B=x^2-3x+4$

$$\begin{array}{r}
x^2-3x+4\\
x+1\,\big)\,\overline{x^3-2x^2+x+4}\\
\underline{x^3+x^2}\\
-3x^2+x\\
\underline{-3x^2-3x}\\
4x+4\\
\underline{4x+4}\\
0
\end{array}$$

8 次の式を計算せよ。$\dfrac{x^2-2x}{x^2-x-12}\div\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}$　解答 $\dfrac{x}{x-4}$　4

解説

与式 $=\dfrac{x^2-2x}{x^2-x-12}\times\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4}$

$=\dfrac{x(x-2)}{(x+3)(x-4)}\times\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{x}{x-4}$

9 次の式を計算せよ。$\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{2}{x^2-1}$　解答 $-\dfrac{1}{x(x+1)}$　5

$\dfrac{-(x+1)}{x(x-1)(x+1)}$ ミス

$\dfrac{-\cancel{x}+1}{x(x-1)\cancel{(x+1)}}=-\dfrac{1}{x(x-1)}$ というミス多し

解説

$\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{(x+1)-2x}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{-(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$　2

$=-\dfrac{1}{x(x+1)}$

10 次の式を計算せよ。

$\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+6)}$　解答 $\dfrac{3}{x(x+6)}$　5

解説

与式 $=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+6}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+6}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x+6-x}{x(x+6)}=\dfrac{3}{x(x+6)}$

$\dfrac{1}{2}$ がない者多し

なぜか $\dfrac{1}{x-6}$ になる者多し

11 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$ax(x+1)+bx(x-1)+c(x+1)(x-1)=2x^2+3x-1$

解答 $a=2$，$b=-1$，$c=1$　5　a,b,c 1つだけ間違い → 3

解説

等式の左辺を x について整理すると　$(a+b+c)x^2+(a-b)x-c=2x^2+3x-1$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して　$a+b+c=2$，$a-b=3$，$-c=-1$

これを解いて　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

別解 等式の両辺の x に 0，1，-1 をそれぞれ代入すると

$-c=-1$，$2a=4$，$2b=-2$

これを解いて　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

逆に，このとき

左辺 $=2x(x+1)-x(x-1)+(x+1)(x-1)$

$=2x^2+2x-x^2+x+x^2-1$

$=2x^2+3x-1=$ 右辺

となり，与式は x についての恒等式である。

したがって　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

12 次の等式を証明せよ。$(a+2b)^2+(2a-b)^2=5(a^2+b^2)$　5

解説

左辺 $=(a^2+4ab+4b^2)+(4a^2-4ab+b^2)$

$=5a^2+5b^2=5(a^2+b^2)=$ 右辺

よって　$(a+2b)^2+(2a-b)^2=5(a^2+b^2)$

証明の書き方になっていない者はダメ

61

13 $a+b+c=0$ のとき，等式 $a^3+b^3+c^3=3abc$ を証明せよ。

(5)

解説

$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ であるから

$$\begin{aligned}\text{左辺}-\text{右辺}&=a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)\\&=a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3+3a^2b+3ab^2\\&=0\end{aligned}$$

よって　$a^3+b^3+c^3=3abc$

参考　左辺 − 右辺 $=a^3+b^3+c^3-3abc$

$a^3+b^3+c^3-3abc$ は

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

のように因数分解される。

したがって，$a+b+c=0$ のとき　$a^3+b^3+c^3-3abc=0$

よって，$a+b+c=0$ のとき，左辺 − 右辺 $=0$ であるから，等式は成り立つ。

14 不等式 $x^2+2xy+2y^2 \geqq 0$ を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

$x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2$ や $(x+2y)^2$ になる者がいる

(5)（等号なし △−1）

解説

$x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2+y^2$

$(x+y)^2 \geqq 0$，$y^2 \geqq 0$ であるから　$(x+y)^2+y^2 \geqq 0$

よって　$x^2+2xy+2y^2 \geqq 0$

等号が成り立つのは，$x+y=0$ かつ $y=0$，すなわち $x=y=0$ のときである。

15 $a>0$，$b>0$ とする。不等式 $2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$ を証明せよ。

$2\sqrt{ab}$ になる者もいる

(5)

解説

両辺の平方の差を考えると

$$(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{4a+b})^2=(4a+4\sqrt{ab}+b)-(4a+b)=4\sqrt{ab}>0$$

よって　$(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{4a+b})^2$

$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{4a+b}>0$ であるから　$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$

なければ △−1

16 4 と 9の相加平均と相乗平均をそれぞれ求めよ。

解答　相加平均，相乗平均の順に　$\dfrac{13}{2}$，6　(4)（各2）

解説

4 と 9の　相加平均は　$\dfrac{4+9}{2}=\dfrac{13}{2}$

相乗平均は　$\sqrt{4\times 9}=\sqrt{36}=6$　← $\sqrt{16}=\pm 6$ とする者がいる

a, b について

相加平均 … $\dfrac{a+b}{2}$

相乗平均 … $\sqrt{ab}$

17 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=2$ のとき，次の式の値を求めよ。　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$　　解答　4

(4)

解説

$\dfrac{x}{a}=2$，$\dfrac{y}{b}=2$，$\dfrac{z}{c}=2$ から　$x=2a$，$y=2b$，$z=2c$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{(2a)^2+(2b)^2+(2c)^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

← 12 と答えている者がいる

$$=\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}=4$$

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ としている者がいる

18 不等式 $|a|+|b| \geqq |a+b|$ を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

解答　証明略，等号が成り立つのは $ab \geqq 0$ のとき

(5)

$|a+b|^2=a^2+b^2$ ミス多し

（等号なし △−1）

解説

両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned}(|a|+|b|)^2-|a+b|^2&=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2\\&=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)\\&=2(|ab|-ab) \geqq 0\end{aligned}$$

$-ab \leqq |-ab|=|ab|$ は理由ではない

よって　$(|a|+|b|)^2 \geqq |a+b|^2$

$|a|+|b| \geqq 0$，$|a+b| \geqq 0$ であるから　$|a|+|b| \geqq |a+b|$

等号が成り立つのは，$|ab|=ab$ すなわち $ab \geqq 0$ のときである。

なければ △−1　　ここができていない

19 $a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right) \geqq 9$ を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

(5)（等号なし △−1）

解説

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+4+1+\frac{4}{ab}$$

$$=ab+\frac{4}{ab}+5$$

なければ △−1

ここで，$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{4}{ab}+5 \geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+5=9$$

よって　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right) \geqq 9$

また等号は　$ab=\dfrac{4}{ab}$，つまり　$ab=2$ のときである。

$ab=\sqrt{2}$ というミス多し

20 x が 0 以上の実数であるとき，関数 $f(x)=\dfrac{x^4-2x^3-x^2+2x+34}{x^2-x+3}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

(6)

$x^4-2x^3-x^2+2x+34$ を x^2-x+3 で割る

解答　$x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ で最小値 6

解説

$x^4-2x^3-x^2+2x+34=(x^2-x+3)(x^2-x-5)+49$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{x^4-2x^3-x^2+2x+34}{x^2-x+3}&=\frac{(x^2-x+3)(x^2-x-5)+49}{x^2-x+3}\\&=(x^2-x-5)+\frac{49}{x^2-x+3}\\&=(x^2-x+3)+\frac{49}{x^2-x+3}-8 \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

ここで，x^2-x+3 について　$x^2-x+3=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$　←　なければ △−1

よって，$x^2-x+3>0$，$\dfrac{49}{x^2-x+3}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$(x^2-x+3)+\frac{49}{x^2-x+3} \geqq 2\sqrt{(x^2-x+3)\cdot\frac{49}{x^2-x+3}}=2\cdot 7=14 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　$f(x) \geqq 14-8=6$　(4) ← 最小値 6 に対して

等号が成り立つのは $x^2-x+3=\dfrac{49}{x^2-x+3}$ すなわち $x^2-x+3=7$ のときである。

ゆえに　$x^2-x-4=0$

$x \geqq 0$ であるから，この 2 次方程式の解は　$x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

したがって，関数 $f(x)$ は $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ で最小値 6 をとる。