数学演習（整数の性質）Ｒ３．２．２４　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 24 の倍数で，正の約数の個数が 21 個である自然数 n を求めよ。

$\boxed{2}$ 1 から 100 までの 100 個の自然数の積 $N=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot100$ について，次の問いに答えよ。

(1)　N を素因数分解したとき，素因数 5 の個数を求めよ。

(2)　N を計算すると，末尾には 0 が連続して何個並ぶか。

$\boxed{3}$ $\dfrac{15}{22}$，$\dfrac{20}{33}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

$\boxed{4}$ n は自然数とする。$\sqrt{n^2+32}$ が自然数となるような n をすべて求めよ。

$\boxed{5}$ n は整数とする。次のことを証明せよ。

$n(n^2+2)$ は 3 の倍数である。

$\boxed{6}$ 441 以下の自然数で，441 と互いに素である自然数の個数を求めよ。

$\boxed{7}$ a は自然数とする。$a+2$ は 7 の倍数であり，$a+7$ は 9 の倍数であるとき，$a+16$ は 63 の倍数であることを証明せよ。

$\boxed{8}$ 1254 と 4788 の最小公倍数を求めよ。

$\boxed{9}$ $\dfrac{148953}{298767}$ を約分して，既約分数にせよ。

$\boxed{10}$ $4n+15$ と $3n+13$ の最大公約数が 7 になるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{11}$ 次の等式を満たす整数 x，y の組を 1 つ求めよ。

$$30x+17y=5$$

$\boxed{12}$ 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$$33x-19y=2$$

$\boxed{13}$ 等式 $3x+2y=15$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

$\boxed{14}$ 次の方程式を満たす整数 x，y の組を求めよ。

$$5x^2+2xy+y^2-12x+4y+11=0$$

$\boxed{15}$ 次の方程式を満たす整数 x，y の組を求めよ。

$$2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=0$$

1 24 の倍数で，正の約数の個数が 21 個である自然数 n を求めよ。

解答　$n=576$

解説

21 を素因数分解すると　$21=3\cdot 7$

よって，正の約数の個数が 21 個である自然数 n を素因数分解すると，

p^{20}，p^2q^6（p，q は異なる素数）

のどちらかの形で表される。

n は 24 の倍数であり，$24=3\cdot 2^3$ であるから，n は p^2q^6 の形で表される。

したがって，求める自然数 n は　$n=3^2\cdot 2^6=576$

2 1 から 100 までの 100 個の自然数の積 $N=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot 100$ について，次の問いに答えよ。

(1)　N を素因数分解したとき，素因数 5 の個数を求めよ。

(2)　N を計算すると，末尾には 0 が連続して何個並ぶか。

解答　(1)　24 個　　(2)　24 個

解説

(1)　素因数 5 は，5 の倍数だけがもつ。

$5^3=125>100$ であるから，5 の倍数，5^2 の倍数で考える。

1 から 100 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は　20（個）

5^2 の倍数の個数は　4（個）

よって，N を素因数分解したとき，素因数 5 の個数は　$20+4=24$（個）

(2)　$10=2\times 5$ であるから，N を素因数分解したときの素因数 2 の個数を調べればよい。

(1) と同様に考えて，1 から 100 までの自然数のうち，2，2^2，2^3，2^4，2^5，2^6 の倍数の個数は，それぞれ 50，25，12，6，3，1 である。よって，N を素因数分解したときの素因数 2 の個数は　$50+25+12+6+3+1=97$（個）

したがって，N を素因数分解したとき，素因数 2 は 97 個，素因数 5 は 24 個ある。

よって，末尾には 0 が連続して 24 個並ぶ。

3 $\dfrac{15}{22}$，$\dfrac{20}{33}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

解答　$\dfrac{66}{5}$

解説

求める分数を $\dfrac{a}{b}$（a，b は互いに素である自然数）とする。

$\dfrac{15}{22}\times\dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　a は 22 の倍数，b は 15 の約数　……①

$\dfrac{20}{33}\times\dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　a は 33 の倍数，b は 20 の約数　……②

求める分数 $\dfrac{a}{b}$ を最小にするには，a を最小にし，b を最大にするとよい。

よって，①，② から

a は 22 と 33 の最小公倍数，b は 15 と 20 の最大公約数

とすればよい。

したがって　$a=66$，$b=5$　　よって，求める分数は　$\dfrac{66}{5}$

4 n は自然数とする。$\sqrt{n^2+32}$ が自然数となるような n をすべて求めよ。

解答　$n=2$，7

解説

$\sqrt{n^2+32}$ が自然数となるとき，k を自然数として，次の式が成り立つ。

$\sqrt{n^2+32}=k$

両辺を 2 乗して移項すると　$k^2-n^2=32$

すなわち　$(k+n)(k-n)=32$　……①

ここで，k，n は $k>n$ を満たす自然数であるから，$k+n$，$k-n$ はともに自然数である。

$k+n>k-n$ であるから，① を満たす自然数 $k+n$，$k-n$ の組は次のようになる。

$(k+n,\ k-n)=(32,\ 1),\ (16,\ 2),\ (8,\ 4)$

$(k+n)+(k-n)=2k$ は偶数であるから

$(k+n,\ k-n)=(16,\ 2),\ (8,\ 4)$

これを満たす自然数 k，n の組は次のようになる。

$(k,\ n)=(9,\ 7),\ (6,\ 2)$

したがって，求める自然数 n は　$n=2$，7

5 n は整数とする。次のことを証明せよ。

$n(n^2+2)$ は 3 の倍数である。

解説

すべての整数は，整数 k を用いて $3k$，$3k+1$，$3k+2$ のいずれかの形に表される。

[1]　$n=3k$ のとき

$n(n^2+2)=3k\{(3k)^2+2\}=3(9k^3+2k)$

[2]　$n=3k+1$ のとき

$n(n^2+2)=(3k+1)\{(3k+1)^2+2\}=(3k+1)(9k^2+6k+3)$

$=3(3k+1)(3k^2+2k+1)$

[3]　$n=3k+2$ のとき

$n(n^2+2)=(3k+2)\{(3k+2)^2+2\}=(3k+2)(9k^2+12k+6)$

$=3(3k+2)(3k^2+4k+2)$

以上から，$n(n^2+2)$ は 3 の倍数である。

別解

3 を法として，$n\equiv 0$，1，2 の各場合について，$n(n^2+2)$ を計算する。

$n\equiv 0$ のとき，　$n(n^2+2)\equiv 0\cdot(0^2+2)\equiv 0$

$n\equiv 1$ のとき，　$n(n^2+2)\equiv 1\cdot(1^2+2)\equiv 3\equiv 0$

$n\equiv 2$ のとき，　$n(n^2+2)\equiv 2\cdot(2^2+2)\equiv 12\equiv 0$

よって，　$n(n^2+2)$ は 3 の倍数である。

別解

$n(n^2+2)=n\{(n^2-1)+3\}=n(n^2-1)+3n=(n-1)n(n+1)+3n$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する3つの自然数の積より3の倍数。

ゆえに $(n-1)n(n+1)+3n$ も3の倍数

6 441 以下の自然数で，441 と互いに素である自然数の個数を求めよ。

解答　252 個

解説

$441=3^2\cdot 7^2$ であるから，441 と互いに素である自然数は，3 の倍数でも 7 の倍数でもない自然数である。

ここで，441 以下の自然数で，3 の倍数または 7 の倍数である数の個数を求める。

3 の倍数の個数は，441 を 3 で割ったときの商で　147

7 の倍数の個数は，441 を 7 で割ったときの商で　63

また，3 の倍数かつ 7 の倍数である数の個数，すなわち 21 の倍数の個数は，441 を 21 で割ったときの商で　21

よって，3 の倍数または 7 の倍数である数の個数は　$147+63-21=189$

したがって，441 以下の自然数で，441 と互いに素である自然数の個数は

$441-189=252$　　すなわち　252 個

7 a は自然数とする。$a+2$ は 7 の倍数であり，$a+7$ は 9 の倍数であるとき，$a+16$ は 63 の倍数であることを証明せよ。

解答　略

解説

$a+2$，$a+7$ は，自然数 m，n を用いて $a+2=7m$，$a+7=9n$ と表される。

$a+16=(a+2)+14=7m+14=7(m+2)$　……①

また　$a+16=(a+7)+9=9n+9=9(n+1)$　……②

よって，① より $a+16$ は 7 の倍数であり，② より $a+16$ は 9 の倍数でもある。

したがって，$a+16$ は 7 と 9 の最小公倍数 63 の倍数である。

8 1254 と 4788 の最小公倍数を求めよ。

解答　52668

解説

4788 と 1254 に互除法の計算を行うと

$4788=1254\cdot 3+1026$

$1254=1026\cdot 1+228$

$1026=228\cdot 4+114$

$228=114\cdot 2$

よって，4788 と 1254 の最大公約数は　114

$1254=114\times 11$，$4788=114\times 42$

ここで，4788 と 1254 の最小公倍数を L とすると　$L=114\times 11\times 42=52668$

別解　1254，4788 をそれぞれ素因数分解すると

$1254=2\cdot 3\cdot 11\cdot 19$，$4788=2^2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 19$

よって，1254 と 4788 の最小公倍数は　$2^2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11\cdot 19=4788\cdot 11=52668$

9 $\dfrac{148953}{298767}$ を約分して，既約分数にせよ。

解答　$\dfrac{173}{347}$

解説

148953 と 298767 に互除法の計算を行うと

$298767=148953\cdot 2+861$

$148953=861\cdot 173$

よって，148953 と 298767 の最大公約数は　861

$148953=173\cdot 861$，$298767=347\cdot 861$ であるから　$\dfrac{148953}{298767}=\dfrac{173\cdot 861}{347\cdot 861}=\dfrac{173}{347}$

10 $4n+15$ と $3n+13$ の最大公約数が 7 になるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。

解答　$n=5$，12，19，26，33，40，47

解説

$4n+15=(3n+13)\cdot 1+n+2$

$3n+13=(n+2)\cdot 3+7$

よって，$4n+15$ と $3n+13$ の最大公約数は $n+2$ と 7 の最大公約数に等しい。

ゆえに，$n+2$ は 7 の倍数である。

また，$3\leqq n+2\leqq 52$ であるから　$n+2=7$，14，21，28，35，42，49

したがって　　$n=5,\ 12,\ 19,\ 26,\ 33,\ 40,\ 47$

$\boxed{11}$ 次の等式を満たす整数 x，y の組を 1 つ求めよ。

$$30x+17y=5$$

解答　$x=20$，$y=-35$

解説

30 と 17 に互除法の計算を行う。

$30=17\cdot1+13$　　移項すると　$13=30-17\cdot1$

$17=13\cdot1+4$　　移項すると　$4=17-13\cdot1$

$13=4\cdot3+1$　　移項すると　$1=13-4\cdot3$

よって　　$1=13-(17-13\cdot1)\cdot3$

$=13\cdot4+17\cdot(-3)$

$=(30-17\cdot1)\cdot4+17\cdot(-3)$

$=30\cdot4+17\cdot(-7)$

すなわち　　$30\cdot4+17\cdot(-7)=1$

この両辺に 5 を掛けると　　$30\cdot(5\cdot4)+17\cdot\{5\cdot(-7)\}=5$

すなわち　　$30\cdot20+17\cdot(-35)=5$

よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　　$x=20$，$y=-35$

別解　30 と 17 に互除法の計算を行う。

$30=17\cdot1+13$　　移項すると　$13=30-17\cdot1$

$17=13\cdot1+4$　　移項すると　$4=17-13\cdot1$

$13=4\cdot3+1$　　移項すると　$1=13-4\cdot3$

$a=30$，$b=17$ とおく。

$13=30-17\cdot1$ より　　$13=a-b\cdot1=a-b$

$4=17-13\cdot1$ より　　$4=b-(a-b)\cdot1=-a+2b$

$1=13-4\cdot3$ より　　$1=(a-b)-(-a+2b)\cdot3=4a-7b$

よって，$4a-7b=1$ より　　$30\cdot4+17\cdot(-7)=1$

この両辺に 5 を掛けると　　$30\cdot(5\cdot4)+17\cdot\{5\cdot(-7)\}=5$

すなわち　　$30\cdot20+17\cdot(-35)=5$

よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　　$x=20$，$y=-35$

$\boxed{12}$ 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$$33x-19y=2$$

解答　$x=19k-8$，$y=33k-14$　（k は整数）

解説

$33x-19y=2$　…… ①

$x=-4$，$y=-7$ は $33x-19y=1$ の整数解の 1 つである。

よって　　$33\cdot(-4)-19\cdot(-7)=1$

この両辺に 2 を掛けると　　$33\cdot\{2\cdot(-4)\}-19\cdot\{2\cdot(-7)\}=2$

すなわち　　$33\cdot(-8)-19\cdot(-14)=2$　…… ②

①−② から　　$33(x+8)-19(y+14)=0$　…… ③

33 と 19 は互いに素であるから，③ のすべての整数解は

$x+8=19k$，$y+14=33k$　（k は整数）

したがって，① のすべての整数解は

$x=19k-8$，$y=33k-14$　（k は整数）

参考 1　33 と 19 に互除法の計算を行う。

$33=19\cdot1+14$　　移項すると　$14=33-19\cdot1$

$19=14\cdot1+5$　　移項すると　$5=19-14\cdot1$

$14=5\cdot2+4$　　移項すると　$4=14-5\cdot2$

$5=4\cdot1+1$　　移項すると　$1=5-4\cdot1$

よって　　$1=5-(14-5\cdot2)=5\cdot3-14\cdot1$

$=(19-14\cdot1)\cdot3-14\cdot1=19\cdot3+14\cdot(-4)$

$=19\cdot3+(33-19\cdot1)(-4)$

$=19\cdot7+33\cdot(-4)$

すなわち　　$33\cdot(-4)-19\cdot(-7)=1$

したがって，$33x-19y=1$ の整数解の 1 つは　$x=-4$，$y=-7$

参考 2　33 と 19 に互除法の計算を行う。

$33=19\cdot1+14$　　移項すると　$14=33-19\cdot1$

$19=14\cdot1+5$　　移項すると　$5=19-14\cdot1$

$14=5\cdot2+4$　　移項すると　$4=14-5\cdot2$

$5=4\cdot1+1$　　移項すると　$1=5-4\cdot1$

$a=33$，$b=19$ とする。

$14=33-19\cdot1$ より　　$14=a-b\cdot1=a-b$

$5=19-14\cdot1$ より　　$5=b-(a-b)\cdot1=-a+2b$

$4=14-5\cdot2$ より　　$4=(a-b)-(-a+2b)\cdot2=3a-5b$

$1=5-4\cdot1$ より　　$1=(-a+2b)-(3a-5b)\cdot1=-4a+7b$

よって，$-4a+7b=1$ より　　$33\cdot(-4)-19\cdot(-7)=1$

したがって，$33x-19y=1$ の整数解の 1 つは　$x=-4$，$y=-7$

別解　mod 19 で考える。　$19\equiv0$，$33\equiv14$　であるから

$33x-19y\equiv14x-0y\equiv14x$

よって，与えられた等式は　$14x\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 19)$　となる。

法19と2は互いに素より，合同式の両辺を2で割って

$7x\equiv1$　両辺3倍して　$21x\equiv3$　となり，$21\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 19)$ より　$2x\equiv3$ となる。

$20\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 19)$ であることを見越して両辺10倍すると　$20x\equiv30$

$30\equiv11$であるから　$x\equiv11\ (\mathrm{mod}\ 19)$　よって　$x=19k+11$ と書ける。

$33x-19y=2$ に代入して　$33(19k+11)-19y=2$

$33\cdot19k-19y+361=0$　19で割って　$33k-y+19=0$　より　$y=33k+19$

以上より　　$x=19k+11$，$y=33k+19$　（k は整数）

参考　法を x の係数 33 で考えても整数解を求められるが，一般に，法とする数は小さい方が扱いやすい。

$\boxed{13}$ 等式 $3x+2y=15$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

解答　$(x,\ y)=(1,\ 6),\ (3,\ 3)$

解説

$3x+2y=15$ から　　$2y=3(5-x)$　…… ①

$y>0$ であるから　　$3(5-x)>0$　　ゆえに　　$x<5$

また，① において，2 と 3 は互いに素であるから，$5-x$ は 2 の倍数，すなわち偶数である。よって　　$x=1,\ 3$　　したがって　　$(x,\ y)=(1,\ 6),\ (3,\ 3)$

参考　2 と 3 は互いに素であるから，① より　　$y=3k$，$5-x=2k$　（k は整数）

よって　　$x=-2k+5$，$y=3k$　（k は整数）

$x\geqq1$，$y\geqq1$ であることを利用して，k の値を絞り込んでもよい。

$\boxed{14}$ 次の方程式を満たす整数 x，y の組を求めよ。

$$5x^2+2xy+y^2-12x+4y+11=0$$

解答　$(x,\ y)=(2,\ -1),\ (2,\ -7)$

解説

$5x^2+2xy+y^2-12x+4y+11=0$ を y について整理すると

$y^2+2(x+2)y+5x^2-12x+11=0$　…… ①

この y についての 2 次方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(x+2)^2-1\cdot(5x^2-12x+11)=-4x^2+16x-7$

$=-(4x^2-16x+7)=-(2x-1)(2x-7)$

① の解は整数（実数）であるから　　$D\geqq0$

ゆえに　　$(2x-1)(2x-7)\leqq0$　　よって　　$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{7}{2}$

x は整数であるから　　$x=1,\ 2,\ 3$　…… ②

また，$D\geqq0$ のとき，① の解は　　$y=-(x+2)\pm\sqrt{\dfrac{D}{4}}$

x，y は整数であるから，$\dfrac{D}{4}$ は 0 または平方数である。

② の各 x の値に対する $\dfrac{D}{4}$ の値は順に　　5，9，5

ゆえに，② の x の値のうち，$x=2$ のみが適する。

$x=2$ のとき，① は　　$y^2+8y+7=0$　　ゆえに　　$(y+1)(y+7)=0$

よって　　$y=-1,\ -7$

したがって　　$(x,\ y)=(2,\ -1),\ (2,\ -7)$

別解　① から　　$\{y+(x+2)\}^2-(x+2)^2+5x^2-12x+11=0$

ゆえに　　$(y+x+2)^2+4x^2-16x+7=0$

よって　　$(y+x+2)^2+4(x-2)^2-4\cdot2^2+7=0$

ゆえに　　$(y+x+2)^2+\{2(x-2)\}^2=9$

x，y が整数のとき，$y+x+2$ は整数，$2(x-2)$ は偶数である。

よって　　$(y+x+2,\ 2(x-2))=(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$

したがって　　$(x,\ y)=(2,\ -1),\ (2,\ -7)$

$\boxed{15}$ 次の方程式を満たす整数 x，y の組を求めよ。

$$2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=0$$

解答　$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (-1,\ 0)$

解説

$(x+2y+a)(2x-y+b)=2x^2+3xy-2y^2+(2a+b)x+(-a+2b)y+ab$

である。$2a+b=-3$，$-a+2b=4$ とすると　　$a=-2$，$b=1$

ゆえに　　$(x+2y-2)(2x-y+1)=2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-2$　…… ①

方程式は　　$(2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-2)-3=0$

① を代入して　　$(x+2y-2)(2x-y+1)=3$

x，y は整数であるから，$x+2y-2$，$2x-y+1$ も整数である。

よって，次のような表が得られる。

$x+2y-2$	1	3	-1	-3
$2x-y+1$	3	1	-3	-1
$x+2y$	3	5	1	-1
$2x-y$	2	0	-4	-2
$5x$	7	5	-7	-5
x	$\frac{7}{5}$	1	$-\frac{7}{5}$	-1
y		2		0

したがって　　$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (-1,\ 0)$

1 24 の倍数で，正の約数の個数が 21 個である自然数 n を求めよ。

解答 $n=576$

これの不適が言えるように

$2^2\times3^6$ は24の倍数にならない

解説

21 を素因数分解すると　$21=3\cdot7$

よって，正の約数の個数が 21 個である自然数 n を素因数分解すると，

p^{20}，p^2q^6（p，q は異なる素数）

← $p^3\times q^7$ としている者多し。

のどちらかの形で表される。

n は 24 の倍数であり，$24=3\cdot2^3$ であるから，n は p^2q^6 の形で表される。

したがって，求める自然数 n は　　$n=3^2\cdot2^6=576$

2 1 から 100 までの 100 個の自然数の積 $N=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot100$ について，次の問いに答えよ。

(1) N を素因数分解したとき，素因数 5 の個数を求めよ。

(2) N を計算すると，末尾には 0 が連続して何個並ぶか。

解答 (1) 24 個　(2) 24 個

解説

(1) 素因数 5 は，5 の倍数だけがもつ。

$5^3=125>100$ であるから，5 の倍数，5^2 の倍数で考える。

1 から 100 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は　20（個）

5^2 の倍数の個数は　4（個）

よって，N を素因数分解したとき，素因数 5 の個数は　　$20+4=24$（個）

(2) $10=2\times5$ であるから，N を素因数分解したときの素因数 2 の個数を調べればよい。

(1) と同様に考えて，1 から 100 までの自然数のうち，2，2^2，2^3，2^4，2^5，2^6 の倍数の個数は，それぞれ 50，25，12，6，3，1 である。よって，N を素因数分解したときの素因数 2 の個数は　　$50+25+12+6+3+1=97$（個）

したがって，N を素因数分解したとき，素因数 2 は 97 個，素因数 5 は 24 個ある。

よって，末尾には 0 が連続して 24 個並ぶ。

3 $\dfrac{15}{22}$，$\dfrac{20}{33}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

解答 $\dfrac{66}{5}$

$\dfrac{66}{60}$，66 という解答多し。

$\dfrac{66}{60}$ をかけたら自然数になってしまう

解説

求める分数を $\dfrac{a}{b}$（a，b は互いに素である自然数）とする。

$\dfrac{15}{22}\times\dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　　a は 22 の倍数，b は 15 の約数　……①

$\dfrac{20}{33}\times\dfrac{a}{b}$ は自然数となるから　　a は 33 の倍数，b は 20 の約数　……②

求める分数 $\dfrac{a}{b}$ を最小にするには，a を最小にし，b を最大にするとよい。

よって，①，② から

a は 22 と 33 の最小公倍数，b は 15 と 20 の最大公約数

とすればよい。

したがって　　$a=66$，$b=5$　　　よって，求める分数は　$\dfrac{66}{5}$

4 n は自然数とする。$\sqrt{n^2+32}$ が自然数となるような n をすべて求めよ。

解答 $n=2，7$

解説

$\sqrt{n^2+32}$ が自然数となるとき，k を自然数として，次の式が成り立つ。

$$\sqrt{n^2+32}=k$$

両辺を 2 乗して移項すると　　$k^2-n^2=32$

すなわち　　$(k+n)(k-n)=32$　……①

ここで，k，n は $k>n$ を満たす自然数であるから，$k+n$，$k-n$ はともに自然数である。

$k+n>k-n$ であるから，① を満たす自然数 $k+n$，$k-n$ の組は次のようになる。

$(k+n,\ k-n)=(32,\ 1),\ (16,\ 2),\ (8,\ 4)$

$(k+n)+(k-n)=2k$ は偶数であるから

$(k+n,\ k-n)=(16,\ 2),\ (8,\ 4)$

これを満たす自然数 k，n の組は次のようになる。

$(k,\ n)=(9,\ 7),\ (6,\ 2)$

したがって，求める自然数 n は　　$n=2，7$

5 n は整数とする。次のことを証明せよ。

$n(n^2+2)$ は 3 の倍数である。

解説

すべての整数は，整数 k を用いて $3k$，$3k+1$，$3k+2$ のいずれかの形に表される。

[1] $n=3k$ のとき

$$n(n^2+2)=3k\{(3k)^2+2\}=3(9k^3+2k)$$

[2] $n=3k+1$ のとき

$$n(n^2+2)=(3k+1)\{(3k+1)^2+2\}=(3k+1)(9k^2+6k+3)$$
$$=3(3k+1)(3k^2+2k+1)$$

[3] $n=3k+2$ のとき

$$n(n^2+2)=(3k+2)\{(3k+2)^2+2\}=(3k+2)(9k^2+12k+6)$$
$$=3(3k+2)(3k^2+4k+2)$$

展開してつなげてもいい

以上から，$n(n^2+2)$ は 3 の倍数である。

別解

3 を法として，$n\equiv0$，1，2 の各場合について，$n(n^2+2)$ を計算する。

$n\equiv0$ のとき，$n(n^2+2)\equiv0\cdot(0^2+2)\equiv0$

$n\equiv1$ のとき，$n(n^2+2)\equiv1\cdot(1^2+2)\equiv3\equiv0$

$n\equiv2$ のとき，$n(n^2+2)\equiv2\cdot(2^2+2)\equiv12\equiv0$

よって，$n(n^2+2)$ は 3 の倍数である。

$n(n^2+2)$
$=n(n+1)(n+2)-3n$
というミス多し

別解

$n(n^2+2)=n\{(n^2-1)+3\}=n(n^2-1)+3n=(n-1)n(n+1)+3n$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する3つの自然数の積より3の倍数。

ゆえに $(n-1)n(n+1)+3n$ も3の倍数

他にも $n(n^2+2)$
$=n(n+1)(n+2)-3n^2$
など。

6 441 以下の自然数で，441 と互いに素である自然数の個数を求めよ。

解答 252 個

ここを，求めていない

解説

$441=3^2\cdot7^2$ であるから，441 と互いに素である自然数は，3 の倍数でも 7 の倍数でもない自然数である。

ここで，441 以下の自然数で，3 の倍数または 7 の倍数である数の個数を求める。

3 の倍数の個数は，441 を 3 で割ったときの商で　147

7 の倍数の個数は，441 を 7 で割ったときの商で　63

また，3 の倍数かつ 7 の倍数である数の個数，すなわち 21 の倍数の個数は，441 を 21 で割ったときの商で　21

よって，3 の倍数または 7 の倍数である数の個数は　　$147+63-21=189$

したがって，441 以下の自然数で，441 と互いに素である自然数の個数は

$441-189=252$　　　すなわち　252 個

7 a は自然数とする。$a+2$ は 7 の倍数であり，$a+7$ は 9 の倍数であるとき，$a+16$ は 63 の倍数であることを証明せよ。

解答 略

文字が同じ者がいる

解説

$a+2$，$a+7$ は，自然数 m，n を用いて $a+2=7m$，$a+7=9n$ と表される。

$a+16=(a+2)+14=7m+14=7(m+2)$　……①

また　$a+16=(a+7)+9=9n+9=9(n+1)$　……②

よって，① より $a+16$ は 7 の倍数であり，② より $a+16$ は 9 の倍数でもある。

したがって，$a+16$ は 7 と 9 の最小公倍数 63 の倍数である。

8 1254 と 4788 の最小公倍数を求めよ。

解答 52668

最大公約数と間違えている。

解説

4788 と 1254 に互除法の計算を行うと

$4788=1254\cdot3+1026$

$1254=1026\cdot1+228$

$1026=228\cdot4+114$

$228=114\cdot2$

よって，4788 と 1254 の最大公約数は　　114

$1154=114\times11$，$4788=114\times42$

ここで，4788 と 1254 の最小公倍数を L とすると　　$L=114\times11\times42=52668$

別解 1254，4788 をそれぞれ素因数分解すると

$1254=2\cdot3\cdot11\cdot19$，$4788=2^2\cdot3^2\cdot7\cdot19$

よって，1254 と 4788 の最小公倍数は　　$2^2\cdot3^2\cdot7\cdot11\cdot19=4788\cdot11=52668$

9 $\dfrac{148953}{298767}$ を約分して，既約分数にせよ。

解答 $\dfrac{173}{347}$

解説

148953 と 298767 に互除法の計算を行うと

$298767=148953\cdot2+861$

$148953=861\cdot173$

よって，148953 と 298767 の最大公約数は　861

$148953=173\cdot861$，$298767=347\cdot861$ であるから　　$\dfrac{148953}{298767}=\dfrac{173\cdot861}{347\cdot861}=\dfrac{173}{347}$

10 $4n+15$ と $3n+13$ の最大公約数が 7 になるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。

解答 $n=5，12，19，26，33，40，47$

解説

$4n+15=(3n+13)\cdot1+n+2$

$3n+13=(n+2)\cdot3+7$

よって，$4n+15$ と $3n+13$ の最大公約数は $n+2$ と 7 の最大公約数に等しい。

ゆえに，$n+2$ は 7 の倍数である。

また，$3\leqq n+2\leqq52$ であるから　　$n+2=7，14，21，28，35，42，49$

したがって　$n=5,\ 12,\ 19,\ 26,\ 33,\ 40,\ 47$

$\boxed{11}$ 次の等式を満たす整数 x，y の組を1つ求めよ。

kを用いて表している（1個求めればよい）

$$30x+17y=5$$

互除法を用いないと

$90-85=5$

$\boxed{x=3,\ y=-5}$

解答　$x=20$，$y=-35$

解説

30 と 17 に互除法の計算を行う。

$30=17\cdot1+13$　移項すると　$13=30-17\cdot1$
$17=13\cdot1+4$　移項すると　$4=17-13\cdot1$
$13=4\cdot3+1$　移項すると　$1=13-4\cdot3$

よって　$1=13-(17-13\cdot1)\cdot3$
$=13\cdot4+17\cdot(-3)$
$=(30-17\cdot1)\cdot4+17\cdot(-3)$
$=30\cdot4+17\cdot(-7)$

すなわち　$30\cdot4+17\cdot(-7)=1$

ここで終わって $x=4,\ y=-7$ としている者多し

この両辺に5を掛けると　$30\cdot(5\cdot4)+17\cdot\{5\cdot(-7)\}=5$

すなわち　$30\cdot20+17\cdot(-35)=5$

よって，求める整数 x，y の組の1つは　$x=20$，$y=-35$

別解　30 と 17 に互除法の計算を行う。

$30=17\cdot1+13$　移項すると　$13=30-17\cdot1$
$17=13\cdot1+4$　移項すると　$4=17-13\cdot1$
$13=4\cdot3+1$　移項すると　$1=13-4\cdot3$

$a=30$，$b=17$ とおく。

$13=30-17\cdot1$ より　$13=a-b\cdot1=a-b$
$4=17-13\cdot1$ より　$4=b-(a-b)\cdot1=-a+2b$
$1=13-4\cdot3$ より　$1=(a-b)-(-a+2b)\cdot3=4a-7b$

よって，$4a-7b=1$ より　$30\cdot4+17\cdot(-7)=1$

この両辺に5を掛けると　$30\cdot(5\cdot4)+17\cdot\{5\cdot(-7)\}=5$

すなわち　$30\cdot20+17\cdot(-35)=5$

よって，求める整数 x，y の組の1つは　$x=20$，$y=-35$

(1)
(2)
順番が悪い。

$\boxed{12}$ 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$$33x-19y=2$$

kを用いてx, yを表す

解答　$x=19k-8$，$y=33k-14$　（k は整数）

解説

$x=-4,\ y=-7$ のままやっている者多し

$$33x-19y=2\quad\cdots\cdots①$$

$x=-4$，$y=-7$ は $33x-19y=1$ の整数解の1つである。

よって　$33\cdot(-4)-19\cdot(-7)=1$

この両辺に2を掛けると　$33\cdot\{2\cdot(-4)\}-19\cdot\{2\cdot(-7)\}=2$

すなわち　$33\cdot(-8)-19\cdot(-14)=2$　……②

符号の間違い多し

①−② から　$33(x+8)-19(y+14)=0$　……③

33 と 19 は互いに素であるから，③ のすべての整数解は

代入していない（kの係数がおかしい）

$x+8=19k$，$y+14=33k$　（k は整数）

◎ 特殊解を確める クセをつけてもいいかも

したがって，① のすべての整数解は

$x=19k-8$，$y=33k-14$　（k は整数）

参考1　33 と 19 に互除法の計算を行う。

$33=19\cdot1+14$　移項すると　$14=33-19\cdot1$
$19=14\cdot1+5$　移項すると　$5=19-14\cdot1$
$14=5\cdot2+4$　移項すると　$4=14-5\cdot2$
$5=4\cdot1+1$　移項すると　$1=5-4\cdot1$

よって　$1=5-(14-5\cdot2)=5\cdot3-14\cdot1$
$=(19-14\cdot1)\cdot3-14\cdot1=19\cdot3+14\cdot(-4)$
$=19\cdot3+(33-19\cdot1)(-4)$
$=19\cdot7+33\cdot(-4)$

すなわち　$33\cdot(-4)-19\cdot(-7)=1$

したがって，$33x-19y=1$ の整数解の1つは　$x=-4$，$y=-7$

参考2　33 と 19 に互除法の計算を行う。

$33=19\cdot1+14$　移項すると　$14=33-19\cdot1$
$19=14\cdot1+5$　移項すると　$5=19-14\cdot1$
$14=5\cdot2+4$　移項すると　$4=14-5\cdot2$
$5=4\cdot1+1$　移項すると　$1=5-4\cdot1$

$a=33$，$b=19$ とする。

$14=33-19\cdot1$ より　$14=a-b\cdot1=a-b$
$5=19-14\cdot1$ より　$5=b-(a-b)\cdot1=-a+2b$
$4=14-5\cdot2$ より　$4=(a-b)-(-a+2b)\cdot2=3a-5b$
$1=5-4\cdot1$ より　$1=(-a+2b)-(3a-5b)\cdot1=-4a+7b$

よって，$-4a+7b=1$ より　$33\cdot(-4)-19\cdot(-7)=1$

したがって，$33x-19y=1$ の整数解の1つは　$x=-4$，$y=-7$

別解　mod 19 で考える。　$19\equiv0$，$33\equiv14$　であるから

$$33x-19y\equiv14x-0y\equiv14x$$

よって，与えられた等式は　$14x\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 19)$　となる。

法19と2は互いに素より，合同式の両辺を2で割って

$7x\equiv1$　両辺3倍して　$21x\equiv3$　となり，$21\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 19)$ より　$2x\equiv3$ となる。

$20\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 19)$ であることを見越して両辺10倍すると　$20x\equiv30$

$30\equiv11$ であるから　$x\equiv11\ (\mathrm{mod}\ 19)$　よって　$x=19k+11$ と書ける。

$33x-19y=2$ に代入して　$33(19k+11)-19y=2$

$33\cdot19k-19y+361=0$　19で割って　$33k-y+19=0$　より　$y=33k+19$

以上より　$x=19k+11$，$y=33k+19$　（k は整数）

参考　法を x の係数 33 で考えても整数解を求められるが，一般に，法とする数は小さい方が扱いやすい。

$\boxed{13}$ 等式 $3x+2y=15$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

kで表して終わっている者多し

解答　$(x,\ y)=(1,\ 6),\ (3,\ 3)$

解説

$3x+2y=15$ から　$2y=3(5-x)$　……①

$y>0$ であるから　$3(5-x)>0$　ゆえに　$x<5$

また，① において，2 と 3 は互いに素であるから，$5-x$ は 2 の倍数，すなわち偶数である。よって　$x=1,\ 3$　したがって　$(x,\ y)=(1,\ 6),\ (3,\ 3)$

参考　2 と 3 は互いに素であるから，① より　$y=3k$，$5-x=2k$　（k は整数）

よって　$x=-2k+5$，$y=3k$　（k は整数）

$x\geqq1$，$y\geqq1$ であることを利用して，k の値を絞り込んでもよい。

$\boxed{14}$ 次の方程式を満たす整数 x，y の組を求めよ。

$$5x^2+2xy+y^2-12x+4y+11=0$$

解答　$(x,\ y)=(2,\ -1),\ (2,\ -7)$

解説

$5x^2+2xy+y^2-12x+4y+11=0$ を y について整理すると

$$y^2+2(x+2)y+5x^2-12x+11=0\quad\cdots\cdots①$$

この y についての2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(x+2)^2-1\cdot(5x^2-12x+11)=-4x^2+16x-7$$
$$=-(4x^2-16x+7)=-(2x-1)(2x-7)$$

① の解は整数（実数）であるから　$D\geqq0$

ゆえに　$(2x-1)(2x-7)\leqq0$　よって　$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{7}{2}$

x は整数であるから　$x=1,\ 2,\ 3$　……②

また，$D\geqq0$ のとき，① の解は　$y=-(x+2)\pm\sqrt{\dfrac{D}{4}}$

x，y は整数であるから，$\dfrac{D}{4}$ は 0 または平方数である。

② の各 x の値に対する $\dfrac{D}{4}$ の値は順に　$5,\ 9,\ 5$

ゆえに，② の x の値のうち，$x=2$ のみが適する。

$x=2$ のとき，① は　$y^2+8y+7=0$　ゆえに　$(y+1)(y+7)=0$

よって　$y=-1,\ -7$

したがって　$(x,\ y)=(2,\ -1),\ (2,\ -7)$

別解　① から　$\{y+(x+2)\}^2-(x+2)^2+5x^2-12x+11=0$

ゆえに　$(y+x+2)^2+4x^2-16x+7=0$

よって　$(y+x+2)^2+4(x-2)^2-4\cdot2^2+7=0$

ゆえに　$(y+x+2)^2+\{2(x-2)\}^2=9$

x，y が整数のとき，$y+x+2$ は整数，$2(x-2)$ は偶数である。

よって　$(y+x+2,\ 2(x-2))=(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$

したがって　$(x,\ y)=(2,\ -1),\ (2,\ -7)$

$\boxed{15}$ 次の方程式を満たす整数 x，y の組を求めよ。

$$2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=0$$

解答　$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (-1,\ 0)$

解説

$$(x+2y+a)(2x-y+b)=2x^2+3xy-2y^2+(2a+b)x+(-a+2b)y+ab$$

である。$2a+b=-3$，$-a+2b=4$ とすると　$a=-2$，$b=1$

ゆえに　$(x+2y-2)(2x-y+1)=2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-2$　……①

方程式は　$(2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-2)-3=0$

① を代入して　$(x+2y-2)(2x-y+1)=3$

x，y は整数であるから，$x+2y-2$，$2x-y+1$ も整数である。

よって，次のような表が得られる。

$x+2y-2$	1	3	-1	-3
$2x-y+1$	3	1	-3	-1
$x+2y$	3	5	1	-1
$2x-y$	2	0	-4	-2
$5x$	7	5	-7	-5
x	$\frac{7}{5}$	1	$-\frac{7}{5}$	-1
y		2		0

したがって　$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (-1,\ 0)$