数学演習（合同式）Ｒ３．２．１７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ (1)　等式 $\boxed{}\equiv 7\ (\bmod 3)$ が成り立つように，$\boxed{}$ に整数を入れよ。

(2)　等式 $9\equiv 5\ (\bmod \boxed{})$ が成り立つように，$\boxed{}$ に自然数を入れよ。

$\boxed{2}$ 合同式を用いて，4^{200} を 5 で割った余りを求めよ。

$\boxed{3}$ n は整数とする。合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1)　n を 7 で割った余りが 2 であるとき，n^{30} を 7 で割った余り

(2)　n を 9 で割った余りが 4 であるとき，n^2+3n+4 を 9 で割った余り

(3)　n を 6 で割った余りが 3 であるとき，n^4+2n^3+5 を 6 で割った余り

$\boxed{4}$ n は整数とする。合同式を用いて，n が 5 で割り切れないとき，n^3+2n を 5 で割った余りは 2 または 3 であることを証明せよ。

$\boxed{5}$ 合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1)　53^{47} の一の位　　(2)　7^{150} の下 2 桁

$\boxed{6}$ 次の合同式を満たす x を，それぞれの法 m において，$x \equiv a \pmod{m}$ の形で表せ。
ただし，a は $0 \leqq a < m$ を満たす整数とする。

(1)　$x+4 \equiv 3 \pmod{6}$　　(2)　$7x \equiv 3 \pmod{8}$

(3)　$2x \equiv 6 \pmod{7}$　　(4)　$4x \equiv 8 \pmod{12}$

$\boxed{7}$ (1)　x，y は整数とする。$3x+7y=41$ のとき，$y \equiv 2 \pmod{3}$ を示せ。

(2)　(1) の結果を用いて，方程式 $3x+7y=41$ の整数解をすべて求めよ。

1 (1) 等式 $\boxed{} \equiv 7\ (\mathrm{mod}\ 3)$ が成り立つように，$\boxed{}$ に整数を入れよ。

(2) 等式 $9 \equiv 5\ (\mathrm{mod}\ \boxed{})$ が成り立つように，$\boxed{}$ に自然数を入れよ。

解答 (1) $-2, 1, 4, 7, \cdots$ など　(2) $1, 2, 4$

解説

(1) $x \equiv 7\ (\mathrm{mod}\ 3)$ より $x-7$ は3の倍数となる。
よって，k を整数として $x-7=3k$ とおくと $x=3k+7$ となる。
$k=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ としていくと $x=-2, 1, 4, 7, \cdots$ と無数に求められる

(2) $9 \equiv 5\ (\mathrm{mod}\ n)$ より $9-5$ は n の倍数となる。
よって 4が n の倍数になるので，n は4の正の約数である。ゆえに $n=1, 2, 4$

2 合同式を用いて，4^{200} を 5 で割った余りを求めよ。

解答 1

解説

$4^2 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$ であるから　$4^{200} \equiv 1^{100}\ (\mathrm{mod}\ 5)$

すなわち　$4^{200} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$

よって，4^{200} を 5 で割った余りは　1

別解

$4 \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 5)$ であるから　$4^{200} \equiv (-1)^{200}\ (\mathrm{mod}\ 5)$

すなわち　$4^{200} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$

よって，4^{200} を 5 で割った余りは　1

3 n は整数とする。合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1) n を 7 で割った余りが 2 であるとき，n^{30} を 7 で割った余り

(2) n を 9 で割った余りが 4 であるとき，n^2+3n+4 を 9 で割った余り

(3) n を 6 で割った余りが 3 であるとき，n^4+2n^3+5 を 6 で割った余り

解答 (1) 1　(2) 5　(3) 2

解説

(1) $n \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 7)$ のとき　$n^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7)$

よって　$n^{30} \equiv 1^{10}\ (\mathrm{mod}\ 7)$

すなわち　$n^{30} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7)$

よって，n^{30} を 7 で割った余りは　1

(2) $n \equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 9)$ のとき

$n^2+3n+4 \equiv 4^2+3\cdot4+4 \equiv 32 \equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 9)$

よって，n^2+3n+4 を 9 で割った余りは　5

(3) $n \equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 6)$ のとき

$n^4+2n^3+5 \equiv 3^4+2\cdot3^3+5 \equiv 81+54+5$
$\equiv 140 \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 6)$

よって，n^4+2n^3+5 を 6 で割った余りは　2

4 n は整数とする。合同式を用いて，n が 5 で割り切れないとき，n^3+2n を 5 で割った余りは 2 または 3 であることを証明せよ。

解答 略

解説

5を法として，$n \equiv 1$，2，3，4 の各場合について，n^3+2n を計算すると，次の表のようになる。

n	1	2	3	4
n^3+2n	$1^3+2\cdot1 \equiv 3$	$2^3+2\cdot2 \equiv 12 \equiv 2$	$3^3+2\cdot3 \equiv 33 \equiv 3$	$4^3+2\cdot4 \equiv 72 \equiv 2$

よって，n が 5 で割り切れないとき，n^3+2n を 5 で割った余りは 2 または 3 である。

5 合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1)　53^{47} の一の位　　(2)　7^{150} の下 2 桁

解答　(1)　7　　(2)　49

解説

(1)　53^{47} の一の位は 53^{47} を 10 で割った余りに等しい。

以下，10 を法として考える。

$$53 \equiv 3,\quad 53^2 \equiv 3^2 \equiv 9,\quad 53^3 \equiv 3^3 \equiv 7,\quad 53^4 \equiv 3^4 \equiv 1$$

よって　$53^{47} \equiv (53^4)^{11} \cdot 53^3 \equiv 1^{11} \cdot 7 \equiv 7$

したがって，53^{47} の一の位は　7

参考　$3^2=9$ から，53^2 の一の位は　9

$9\times3=27$ から，53^3 の一の位は　7

$7\times3=21$ から，53^4 の一の位は　1

$1\times3=3$　から，53^5 の一の位は　3

よって，53^n ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$) の一の位は 3，9，7，1 が繰り返し現れる。

$47=4\cdot11+3$ であるから，53^{47} の一の位は　7

(2)　7^{150} の下 2 桁は 7^{150} を 100 で割った余りに等しい。

以下，100 を法として考える。

$$7^2 \equiv 49,\quad 7^3 \equiv 49\cdot7 \equiv 343 \equiv 43,\quad 7^4 \equiv 43\cdot7 \equiv 301 \equiv 1$$

よって　$7^{150} \equiv (7^4)^{37} \cdot 7^2 \equiv 1^{37} \cdot 49 \equiv 49$

したがって，7^{150} の下 2 桁は　49

6 次の合同式を満たす x を，それぞれの法 m において，$x\equiv a \pmod{m}$ の形で表せ。ただし，a は $0 \leqq a < m$ を満たす整数とする。

(1)　$x+4\equiv 3 \pmod 6$　　(2)　$7x\equiv 3 \pmod 8$

(3)　$2x\equiv 6 \pmod 7$　　(4)　$4x\equiv 8 \pmod{12}$

解答　(1)　$x\equiv 5 \pmod 6$　　(2)　$x\equiv 5 \pmod 8$　　(3)　$x\equiv 3 \pmod 7$

(4)　$x\equiv 2,\ 5,\ 8,\ 11 \pmod{12}$　または　$x\equiv 2 \pmod 3$

解説

(1)　$x+4\equiv 3 \pmod 6$ から　$x\equiv -1 \pmod 6$

よって　$x\equiv -1+6 \pmod 6$

すなわち　$x\equiv 5 \pmod 6$

(2)　次の表より，$7x\equiv 3 \pmod 8$ となるのは，$x=5$ のときである。

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$7x$	0	7	$14\equiv6$	$21\equiv5$	$28\equiv4$	$35\equiv3$	$42\equiv2$	$49\equiv1$

よって　$x\equiv 5 \pmod 8$

別解　$7x\equiv 3 \pmod 8$ の両辺に 7 を掛けて

$49x\equiv 21 \pmod 8$

$49x\equiv 1\cdot x\equiv x \pmod 8$，$21\equiv 5 \pmod 8$ であるから

$x\equiv 5 \pmod 8$

(3)　次の表より，$2x\equiv 6 \pmod 7$ となるのは，$x=3$ のときである。

x	0	1	2	3	4	5	6
$2x$	0	2	4	6	$8\equiv1$	$10\equiv3$	$12\equiv5$

よって　$x\equiv 3 \pmod 7$

別解　$2x\equiv 6 \pmod 7$ の両辺に 4 を掛けて

$8x\equiv 24 \pmod 7$

$8x\equiv 1\cdot x\equiv x \pmod 7$，$24\equiv 3 \pmod 7$ であるから

$x\equiv 3 \pmod 7$

参考　2 と 7 は互いに素であるから，$2x\equiv 6 \pmod 7$ の両辺を 2 で割ると

$x\equiv 3 \pmod 7$

(4)　次の表より，$4x\equiv 8 \pmod{12}$ となるのは，$x=2,\ 5,\ 8,\ 11$ のときである。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$4x$	0	4	8	$12\equiv0$	$16\equiv4$	$20\equiv8$	$24\equiv0$	$28\equiv4$	$32\equiv8$	$36\equiv0$	$40\equiv4$	$44\equiv8$

よって　$x\equiv 2,\ 5,\ 8,\ 11 \pmod{12}$

別解　$4x\equiv 8 \pmod{12}$ より $4x-8\equiv 0 \pmod{12}$

よって　$4(x-2)\equiv 0 \pmod{12}$　となるので，$4(x-2)$ が12の倍数となる。

ゆえに　$x-2$　が3の倍数になればいいので　$x\equiv 2 \pmod 3$

7 (1)　x，y は整数とする。$3x+7y=41$ のとき，$y\equiv 2 \pmod 3$ を示せ。

(2)　(1) の結果を用いて，方程式 $3x+7y=41$ の整数解をすべて求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　$x=-7k+9$，$y=3k+2$ (k は整数)

解説

(1)　$3x\equiv 0 \pmod 3$ であるから

$7y\equiv 41 \pmod 3$

$7\equiv 1$，$41\equiv 2 \pmod 3$ であるから

$y\equiv 2 \pmod 3$

(2)　(1) の結果により，k を整数として，$y=3k+2$ と表される。

これを方程式に代入すると　$3x+7(3k+2)=41$

x について解くと　$x=-7k+9$

よって，求める整数解は　$x=-7k+9$，$y=3k+2$ (k は整数)

参考　法を y の係数 7 で考えても整数解を求められるが，一般に，法とする数は小さい方が扱いやすい。