



4  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  を満たす自然数  $x, y$  の組をすべて求めよ。

5 次の等式を満たす自然数  $x, y$  の組をすべて求めよ。  $x^2 - y^2 = 28$

6 次の等式を満たす整数  $x, y$  の組をすべて求めよ。  $6xy + 3x - 4y - 14 = 0$

1 次の等式を満たす整数  $x, y$  の組をすべて求めよ。  $(x-4)(y+1)=3$

解答  $(x, y)=(5, 2), (7, 0), (3, -4), (1, -2)$

解説

$x, y$  は整数であるから、 $x-4, y+1$  も整数である。  
 $x-4$  と  $y+1$  を掛けて 3 になるので、 $x-4$  も  $y+1$  も 3 の約数である。  
よって  $(x-4, y+1)=(1, 3), (3, 1), (-1, -3), (-3, -1)$   
したがって  $(x, y)=(5, 2), (7, 0), (3, -4), (1, -2)$

$x-4$	1	3	-1	-3
$y+1$	3	1	-3	-1

↓

$x$	1+4	3+4	-1+4	-3+4
$y$	3-1	1-1	-3-1	-1-1

↓

$x$	5	7	3	1
$y$	2	0	-4	-2

2 等式  $xy+4x-2y=5$  を  $(x+\text{ア})(y+\text{イ})=\text{ウ}$  と変形するとき、  
 $\text{ア} \sim \text{ウ}$  に入る数を求めよ。

解答  $\text{ア} = -2, \text{イ} = 4, \text{ウ} = -3$

解説

$xy+4x-2y=5$  ←  $x$  がある部分を  $x$  でくくる  
 $x(y+4)-2y=5$  ←  $y+4$  が登場するように、 $y$  のところに  $(y+4)-4$  を代入する  
 $x(y+4)-2((y+4)-4)=5$  ← 分配法則  
 $x(y+4)-2(y+4)+8=5$  ←  $(y+4)$  でくくって因数分解  
 $(x-2)(y+4)+8=5$  ←  $+8$  を移行する  
 $(x-2)(y+4)=-3$

参考 この変形は必ず身につけること

3 次の等式を満たす整数  $x, y$  の組をすべて求めよ。  $xy-2x+3y-1=0$

解答  $(x, y)=(-2, -3), (-8, 3), (-4, 7), (2, 1)$

解説

与式は次のように変形できる。  
 $xy-2x+3y-1=0$   
 $x(y-2)+3y-1=0$   
 $x(y-2)+3(y-2)+2-1=0$   
 $x(y-2)+3(y-2)+6-1=0$   
 $(x+3)(y-2)+6-1=0$

すなわち  $(x+3)(y-2)=-5$  …(※)  
 $x, y$  は整数であるから、 $x+3, y-2$  も整数である。  
(※)より  $x+3$  と  $y-2$  を掛けて  $-5$  になるので、 $x+3$  も  $y-2$  も  $-5$  の約数である。  
ゆえに  $(x+3, y-2)=(1, -5), (-5, 1), (-1, 5), (5, -1)$   
よって  $(x, y)=(-2, -3), (-8, 3), (-4, 7), (2, 1)$

$x+3$	1	5	-1	-5
$y-2$	-5	-1	5	1

 → 

$x$	-2	2	-4	-8
$y$	-3	1	7	3

別解

$xy-2x+3y-1=0$  より  $x(y-2)=-3y+1$  …①  
ここで①において  $y=2$  とすると、 $x \times (2-2)=-3 \times 2+1$   
つまり  $x \times 0=-5$  となるから、この式を満たす  $x$  は存在しない  
よって  $y \neq 2$  であるので、①の両辺を  $y-2$  で割ると  $x=\frac{-3y+1}{y-2}$   
ここで、分子の  $y$  を  $(y-2)+2$  に置き換えて、分配法則を用いると

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3((y-2)+2)+1}{y-2} = \frac{-3(y-2)+(-3) \times 2+1}{y-2} \\ &= \frac{-3(y-2)-5}{y-2} \\ &= \frac{-3(y-2)}{y-2} + \frac{-5}{y-2} = -3 + \frac{-5}{y-2} \end{aligned}$$

つまり、 $x=-3+\frac{-5}{y-2}$  …②と変形できる。  
ここで、 $x$  は整数より  $-3+\frac{-5}{y-2}$  も整数である。ゆえに、 $-5$  は  $y-2$  で  
割り切れなければならないので、 $y-2$  が整数であるから、 $y-2$  は  $-5$  の約数である。  
よって

$$y-2=1, 5, -1, -5$$

これらを②に代入する。  
 $y-2=1$ 、つまり、 $y=3$  のとき②より、 $x=-3+\frac{-5}{3-2}=-8$   
 $y-2=5$ 、つまり、 $y=7$  のとき②より、 $x=-3+\frac{-5}{7-2}=-4$   
 $y-2=-1$ 、つまり、 $y=1$  のとき②より、 $x=-3+\frac{-5}{1-2}=2$   
 $y-2=-5$ 、つまり、 $y=-3$  のとき②より、 $x=-3+\frac{-5}{-3-2}=-2$   
以上より、 $(x, y)=(-2, -3), (-8, 3), (-4, 7), (2, 1)$

4  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  を満たす自然数  $x, y$  の組をすべて求めよ。

解答  $(x, y) = (4, 12), (6, 6), (12, 4)$

解説

与式の両辺に  $3xy$  を掛けると  $3y + 3x = xy$

すなわち  $xy - 3x - 3y = 0$

よって  $(x - 3)(y - 3) = 9$

$x, y$  は自然数であるから、 $x - 3, y - 3$  は  $-2$  以上の整数である。

ゆえに  $(x - 3, y - 3) = (1, 9), (3, 3), (9, 1)$

よって  $(x, y) = (4, 12), (6, 6), (12, 4)$

別解

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  より  $\frac{1}{y} = \frac{1}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x}{3x} - \frac{3}{3x} = \frac{x - 3}{3x}$

つまり  $\frac{1}{y} = \frac{x - 3}{3x}$  と変形できる。 $y$  は正より、左辺  $\frac{1}{y}$  は正の数であるから

右辺  $\frac{x - 3}{3x}$  も正の数である。ゆえに、分子  $x - 3 > 0$  から  $x > 3 \cdots \textcircled{1}$

また、 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  を満たす  $(x, y)$  の組が 1 つ見つかったとして、その  $x$  と  $y$  を入れ替

えたものも  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  を満たす。（ $x$  と  $y$  の対称性より）

よって、 $x$  と  $y$  に  $x \leq y$  という大小関係をつけて考える。

$x \leq y$  より  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$  が成り立つので、 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdots \textcircled{2}$  が成り立つ。

②に  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  を代入すると  $\frac{1}{3} \leq \frac{2}{x}$  より  $x \leq 6 \cdots \textcircled{3}$  が成り立つ。

①と③の共通範囲から、 $3 < x \leq 6$  であり、これを満たす自然数  $x$  は  $x = 4, 5, 6$  のみ

●  $x = 4$  のとき

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  に  $x = 4$  を代入して  $\frac{1}{4} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  より  $\frac{1}{y} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

ゆえに  $y = 12$

●  $x = 5$  のとき

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  に  $x = 5$  を代入して  $\frac{1}{5} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  より  $\frac{1}{y} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

ゆえに  $y = \frac{15}{2}$  となるが、 $y$  が整数とならないので不適

●  $x = 6$  のとき

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  に  $x = 6$  を代入して  $\frac{1}{6} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  より  $\frac{1}{y} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

ゆえに  $y = 6$

以上より、 $(x, y) = (4, 12), (6, 6)$  であるが、 $x \leq y$  という条件をはずすと  
 $(x, y) = (12, 4)$  も解となる。よって  $(x, y) = (4, 12), (6, 6), (12, 4)$

5 次の等式を満たす自然数  $x, y$  の組をすべて求めよ。  $x^2 - y^2 = 28$

解答  $(x, y) = (8, 6)$

解説

等式を変形すると  $(x + y)(x - y) = 28$

$x, y$  は自然数であるから、 $x + y, x - y$  は整数で、 $x + y > x - y, x + y \geq 2$  である。

ゆえに  $(x + y, x - y) = (7, 4), (14, 2), (28, 1)$

よって  $(x, y) = \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right), (8, 6), \left(\frac{29}{2}, \frac{27}{2}\right)$

$x, y$  は自然数であるから  $(x, y) = (8, 6)$

参考  $(x + y) + (x - y) = 2x$  であるから、和が偶数となる組  $(x + y, x - y) = (14, 2)$  に絞  
り込んでもよい。

6 次の等式を満たす整数  $x, y$  の組をすべて求めよ。  $6xy + 3x - 4y - 14 = 0$

解答  $(x, y) = (2, 1)$

解説

等式  $6xy + 3x - 4y - 14 = 0$  は次のように変形できる。

$(3x - 2)(2y + 1) + 2 - 14 = 0$

すなわち  $(3x - 2)(2y + 1) = 12$

$x, y$  は整数であるから、 $3x - 2, 2y + 1$  も整数である。  
 $3x - 2$  は 3 の倍数より 2 少ない整数であることと、

$2y + 1$  は奇数であることに着目すると

$(3x - 2, 2y + 1) = (4, 3)$  したがって  $(x, y) = (2, 1)$