

[1] 次の等式を満たす整数  $x, y$  の組をすべて求めよ。  $(x-4)(y+1)=3$

[2] 等式  $xy+4x-2y=5$  を  $(x+\boxed{\text{ア}})(y+\boxed{\text{イ}})=\boxed{\text{ウ}}$  と変形するとき,  
 $\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ウ}}$  に入る数を求めよ。

[3] 次の等式を満たす整数  $x, y$  の組をすべて求めよ。  $xy-2x+3y-1=0$

4  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  を満たす自然数  $x, y$  の組をすべて求めよ。

5 次の等式を満たす自然数  $x, y$  の組をすべて求めよ。  $x^2 - y^2 = 28$

6 次の等式を満たす整数  $x, y$  の組をすべて求めよ。  $6xy + 3x - 4y - 14 = 0$

[1] 次の等式を満たす整数  $x, y$  の組をすべて求めよ。  $(x-4)(y+1)=3$ 解答  $(x, y)=(5, 2), (7, 0), (3, -4), (1, -2)$ 

解説

 $x, y$  は整数であるから、 $x-4, y+1$  も整数である。 $x-4$  と  $y+1$  を掛けて 3 になるので、 $x-4$  も  $y+1$  も 3 の約数である。よって  $(x-4, y+1)=(1, 3), (3, 1), (-1, -3), (-3, -1)$ したがって  $(x, y)=(5, 2), (7, 0), (3, -4), (1, -2)$ 

$x-4$	1	3	-1	-3
$y+1$	3	1	-3	-1

↓

$x$	1+4	3+4	-1+4	-3+4
$y$	3-1	1-1	-3-1	-1-1

↓

$x$	5	7	3	1
$y$	2	0	-4	-2

[2] 等式  $xy+4x-2y=5$  を  $(x+\boxed{\text{ア}})(y+\boxed{\text{イ}})=\boxed{\text{ウ}}$  と変形するとき、 $\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ウ}}$  に入る数を求めよ。解答  $\boxed{\text{ア}} = -2, \boxed{\text{イ}} = 4, \boxed{\text{ウ}} = -3$ 

解説

$$\begin{aligned} xy+4x-2y &= 5 && \leftarrow x \text{ がある部分を } x \text{ でくくる} \\ x(y+4)-2y &= 5 && \leftarrow y+4 \text{ が登場するように, } y \text{ のところに} \\ &&& (y+4)-4 \text{ を代入する} \\ x(y+4)-2(y+4)-4 &= 5 && \leftarrow \text{分配法則} \\ x(y+4)-2(y+4)+8 &= 5 && \leftarrow (y+4) \text{ でくくって因数分解} \\ (x-2)(y+4)+8 &= 5 && \leftarrow +8 \text{ を移行する} \\ (x-2)(y+4) &= -3 \end{aligned}$$

参考 この変形は必ず身につけること

[3] 次の等式を満たす整数  $x, y$  の組をすべて求めよ。  $xy-2x+3y-1=0$ 解答  $(x, y)=(-2, -3), (-8, 3), (-4, 7), (2, 1)$ 

解説

与式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} xy-2x+3y-1 &= 0 \\ x(y-2)+3y-1 &= 0 \\ x(y-2)+3(y-2)+2 &= 1 \\ x(y-2)+3(y-2)+6-1 &= 0 \\ (x+3)(y-2)+6-1 &= 0 \\ (x+3)(y-2) &= -5 \quad \cdots (\ast) \end{aligned}$$

 $x, y$  は整数であるから、 $x+3, y-2$  も整数である。(\ast)より  $x+3$  と  $y-2$  を掛けて -5 になるので、 $x+3$  も  $y-2$  も -5 の約数である。ゆえに  $(x+3, y-2)=(1, -5), (-5, 1), (-1, 5), (5, -1)$ よって  $(x, y)=(-2, -3), (-8, 3), (-4, 7), (2, 1)$ 

$x+3$	1	5	-1	-5
$y-2$	-5	-1	5	1

$x$	-2	2	-4	-8
$y$	-3	1	7	3

別解

$$xy-2x+3y-1=0 \quad \text{より} \quad x(y-2)=-3y+1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで \textcircled{1}において  $y=2$  とすると、 $x \times (2-2)=-3 \times 2+1$ つまり  $x \times 0=-5$  となるから、この式を満たす  $x$  は存在しない。

$$\text{よって } y \neq 2 \text{ であるので, } \textcircled{1} \text{の両辺を } y-2 \text{ で割ると } x = \frac{-3y+1}{y-2}$$

ここで、分子の  $y$  を  $(y-2)+2$  に置き換えて、分配法則を用いると

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3[(y-2)+2]+1}{y-2} = \frac{-3(y-2)+(-3) \times 2+1}{y-2} \\ &= \frac{-3(y-2)-5}{y-2} \\ &= \frac{-3(y-2)}{y-2} + \frac{-5}{y-2} = -3 + \frac{-5}{y-2} \end{aligned}$$

つまり、 $x=-3+\frac{-5}{y-2} \cdots \textcircled{2}$  と変形できる。ここで、 $x$  は整数より  $-3+\frac{-5}{y-2}$  も整数である。ゆえに、-5 は  $y-2$  で割り切れないなければならないので、 $y-2$  が整数であるから、 $y-2$  は -5 の約数である。

よって

$$y-2=1, 5, -1, -5$$

これらを \textcircled{2} に代入する。

$$y-2=1, \text{ つまり, } y=3 \text{ のとき} \textcircled{2} \text{より, } x=-3+\frac{-5}{3-2}=-8$$

$$y-2=5, \text{ つまり, } y=7 \text{ のとき} \textcircled{2} \text{より, } x=-3+\frac{-5}{7-2}=-4$$

$$y-2=-1, \text{ つまり, } y=1 \text{ のとき} \textcircled{2} \text{より, } x=-3+\frac{-5}{1-2}=2$$

$$y-2=-5, \text{ つまり, } y=-3 \text{ のとき} \textcircled{2} \text{より, } x=-3+\frac{-5}{-3-2}=-2$$

以上より、 $(x, y)=(-2, -3), (-8, 3), (-4, 7), (2, 1)$

4  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  を満たす自然数  $x, y$  の組をすべて求めよ。

解答  $(x, y) = (4, 12), (6, 6), (12, 4)$

解説

与式の両辺に  $3xy$  を掛けると  $3y+3x=xy$

すなわち  $xy-3x-3y=0$

よって  $(x-3)(y-3)=9$

$x, y$  は自然数であるから、 $x-3, y-3$  は  $-2$  以上の整数である。

ゆえに  $(x-3, y-3) = (1, 9), (3, 3), (9, 1)$

よって  $(x, y) = (4, 12), (6, 6), (12, 4)$

別解

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \quad \text{より} \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x}{3x} - \frac{3}{3x} = \frac{x-3}{3x}$$

つまり  $\frac{1}{y} = \frac{x-3}{3x}$  と変形できる。 $y$  は正より、左辺  $\frac{1}{y}$  は正の数であるから

右辺  $\frac{x-3}{3x}$  も正の数である。ゆえに、分子  $x-3 > 0$  から  $x > 3 \cdots ①$

また、 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  を満たす  $(x, y)$  の組が 1 つ見つかったとして、その  $x$  と  $y$ を入れ替

えたものも  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  を満たす。 $(x$  と  $y$  の対称性より)

よって、 $x$  と  $y$  に  $x \leq y$  という大小関係をつけて考える。

$x \leq y$  より  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$  が成り立つので、 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdots ②$  が成り立つ。

②に  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$  を代入すると  $\frac{1}{3} \leq \frac{2}{x}$  より  $x \leq 6 \cdots ③$  が成り立つ。

①と③の共通範囲から、 $3 < x \leq 6$  であり、これを満たす自然数  $x$  は  $x=4, 5, 6$  のみ

●  $x=4$  のとき

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \text{ に } x=4 \text{ を代入して } \frac{1}{4} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \quad \text{より} \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

ゆえに  $y=12$

●  $x=5$  のとき

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \text{ に } x=5 \text{ を代入して } \frac{1}{5} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \quad \text{より} \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

ゆえに  $y=\frac{15}{2}$  となるが、 $y$  が整数とならないので不適

●  $x=6$  のとき

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \text{ に } x=6 \text{ を代入して } \frac{1}{6} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \quad \text{より} \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

ゆえに  $y=6$

以上より、 $(x, y) = (4, 12), (6, 6)$  であるが、 $x \leq y$  という条件をはずすと

$(x, y) = (12, 4)$  も解となる。よって  $(x, y) = (4, 12), (6, 6), (12, 4)$

5 次の等式を満たす自然数  $x, y$  の組をすべて求めよ。  $x^2 - y^2 = 28$

解答  $(x, y) = (8, 6)$

解説

等式を変形すると  $(x+y)(x-y)=28$

$x, y$  は自然数であるから、 $x+y, x-y$  は整数で、 $x+y > x-y, x+y \geq 2$  である。

ゆえに  $(x+y, x-y) = (7, 4), (14, 2), (28, 1)$

よって  $(x, y) = \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right), (8, 6), \left(\frac{29}{2}, \frac{27}{2}\right)$

$x, y$  は自然数であるから  $(x, y) = (8, 6)$

参考  $(x+y)+(x-y)=2x$  であるから、和が偶数となる組  $(x+y, x-y) = (14, 2)$  に絞り込んでもよい。

6 次の等式を満たす整数  $x, y$  の組をすべて求めよ。  $6xy+3x-4y-14=0$

解答  $(x, y) = (2, 1)$

解説

等式  $6xy+3x-4y-14=0$  は次のように変形できる。

$$(3x-2)(2y+1)+2-14=0$$

$$\text{すなわち } (3x-2)(2y+1)=12$$

$x, y$  は整数であるから、 $3x-2, 2y+1$  も整数である。

$3x-2$  は 3 の倍数より 2 少ない整数であることと、

$2y+1$  は奇数であること着目すると

$$(3x-2, 2y+1)=(4, 3) \quad \text{したがって } (x, y)=(2, 1)$$