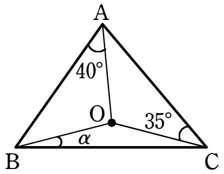
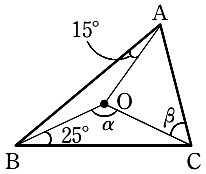
統一テスト（平面図形）Ｒ３．２．８　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1 下の図で，点 O は △ABC の外心である。α，β を求めよ。

(1)

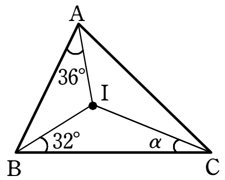


(2)

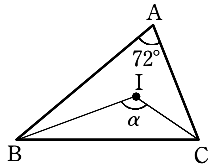


2 下の図で，点 I は △ABC の内心である。α を求めよ。

(1)



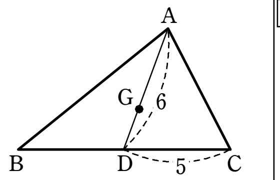
(2)



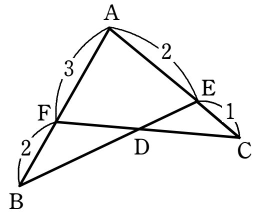
3 AB＝7，BC＝6，CA＝4 である △ABC において，∠A およびその外角の二等分線と，辺 BC またはその延長との交点を，それぞれ D，E とする。線分 DE の長さを求めよ。

4 右の図において，点 G は △ABC の重心である。次の線分の長さを求めよ。

(1)　BD　　　　　(2)　AG



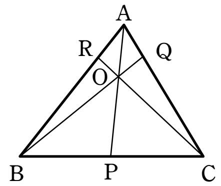
5 右の図において，BD : DE を求めよ。



6 △ABC の辺 AB，AC を 1 : 3 に内分する点を，それぞれ R，Q とする。線分 BQ と CR の交点を O とし，直線 AO と辺 BC の交点を P とする。

(1)　BP : PC を求めよ。

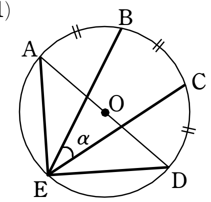
(2)　面積比 △OBC : △ABC を求めよ。



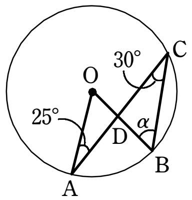
7 △ABC において，∠A＜∠B＜∠C とし，$a=6$，$b=8$，$c=x$ とするとき，x のとりうる値の範囲を求めよ。

8 下の図において，α を求めよ。ただし，点 O は円の中心であり，(1) では $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$ である。

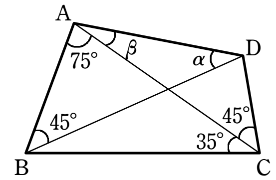
(1)



(2)

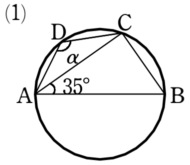


9 右の図において，α，β を求めよ。

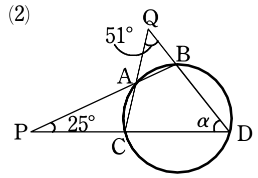


10 下の図において，α を求めよ。ただし，(1) で線分 AB は円の直径とする。

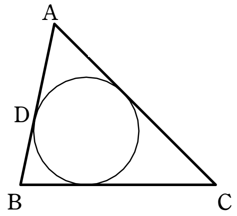
(1)



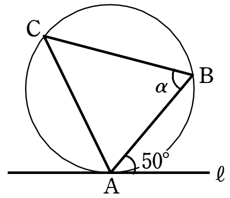
(2)



$\boxed{11}$ △ABCにおいて，AB＝5，BC＝6，CA＝7とする。この三角形の内接円と辺ABとの接点をDとするとき，ADの長さを求めよ。

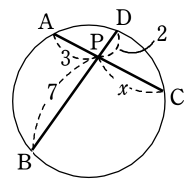


$\boxed{12}$ 下の図において，αを求めよ。ただし，直線ℓは点Aにおける円の接線であり，AC＝BCであるとする。

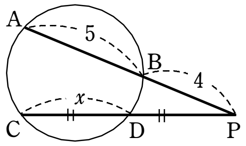


$\boxed{13}$ 下の図において，xの値を求めよ。

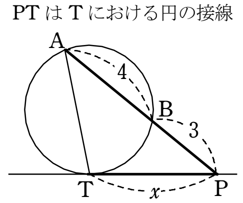
(1)



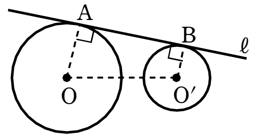
(2) CD＝DP



(3) PTはTにおける円の接線



$\boxed{14}$ 右の図において，直線ℓは2つの円O，O′の共通接線で，A，Bは接点である。円O，O′の半径を，それぞれ5，3とし，O，O′間の距離を10とするとき，線分ABの長さを求めよ。



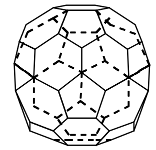
$\boxed{15}$ 線分ABが与えられたとき，線分ABを4 : 3に内分する点を作図せよ。ただし，作図の手順についての説明は書かなくてよいが，作図に用いた線は残しておくこと。

$\boxed{16}$ 空間内の異なる2つの直線ℓ，mと異なる2つの平面α，βについて，次の記述は常に正しいかどうか答えよ。（答えだけでよい）

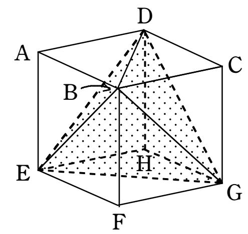
(1) $\ell\perp\alpha$，$m\perp\alpha$ならば$\ell\perp m$　　(2) $\ell\perp\alpha$，$\ell\perp\beta$ ならば$\alpha /\!/ \beta$

(3) $\ell /\!/ \alpha$，$m /\!/ \alpha$ ならば$\ell /\!/ m$

$\boxed{17}$ 右の図の立体は，正五角形が12個，正六角形が20個でできている凸多面体である。どの頂点にも1個の正五角形の面と2個の正六角形の面が集まっている。この多面体の頂点の数，辺の数を求めよ。

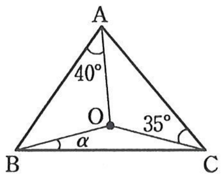


$\boxed{18}$ 1辺の長さがaの正四面体の外接球の半径Rを求めよ。
（外接球とは，正四面体の4つの頂点を通る球である）

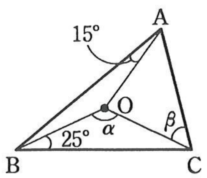


1 下の図で，点 O は △ABC の外心である。α，β を求めよ。

(1)



(2)



片方 求め忘れている 者が多い

解答 (1) $\alpha=15°$ ③　(2) $\alpha=130°$，$\beta=50°$ ⑥ (各3)

解説

OA＝OB＝OC であるから，△OAC，△OAB，△OBC はいずれも二等辺三角形である。

(1) ∠OAC＝∠OCA＝35°　∠OBA＝∠OAB＝40°　∠OCB＝∠OBC＝α

△ABC において，内角の和は 180° であるから　$2(35°+40°+\alpha)=180°$

これを解いて　$\alpha=15°$

(2) ∠OCB＝∠OBC＝25°

△OBC において，内角の和は 180° であるから　$\alpha+25°\times2=180°$

これを解いて　$\alpha=130°$

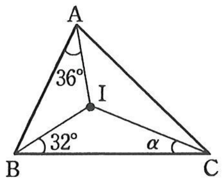
また　∠OBA＝∠OAB＝15°　∠OAC＝∠OCA＝β

△ABC において，内角の和は 180° であるから　$2(25°+15°+\beta)=180°$

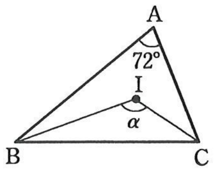
これを解いて　$\beta=50°$

2 下の図で，点 I は △ABC の内心である。α を求めよ。

(1)



(2)



72°×2 =144° ミス多し

③

解答 (1) $\alpha=22°$　(2) $\alpha=126°$ ③

解説

(1) ∠IAC＝∠IAB＝36°　∠IBA＝∠IBC＝32°　∠ICA＝∠ICB＝α

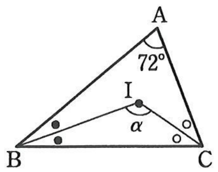
△ABC において，内角の和は 180° であるから　$2(36°+32°+\alpha)=180°$

これを解いて　$\alpha=22°$

(2) △ABC において，内角の和は 180° であるから

∠ABC＋∠ACB＝180°－72°＝108°

∠IBA＝∠IBC，∠ICA＝∠ICB であるから



$$\angle IBC+\angle ICB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$$

$$=\frac{1}{2}\times108°=54°$$

△IBC において，内角の和は 180° であるから

$\alpha=180°-(\angle IBC+\angle ICB)=180°-54°=126°$

3 AB＝7，BC＝6，CA＝4 である △ABC において，∠A およびその外角の二等分線と，辺 BC またはその延長との交点を，それぞれ D，E とする。線分 DE の長さを求めよ。

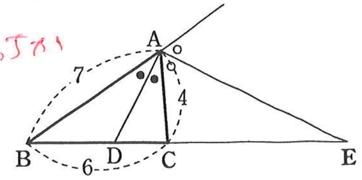
解答 $\frac{112}{11}$

解説 ― ④

AD は ∠A の二等分線であるから

BD : DC＝AB : AC＝7 : 4

よって



どちらか

$DC=\frac{4}{7+4}BC=\frac{4}{11}\times6=\frac{24}{11}$ ……① ②

また，AE は ∠A の外角の二等分線であるから

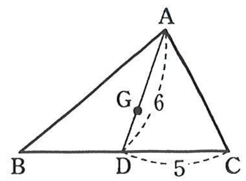
BE : EC＝AB : AC＝7 : 4 ②

よって　$CE=\frac{4}{7-4}BC=\frac{4}{3}\times6=8$ ……②

①，② から　$DE=DC+CE=\frac{24}{11}+8=\frac{112}{11}$

4 右の図において，点 G は △ABC の重心である。次の線分の長さを求めよ。

(1) BD　　(2) AG



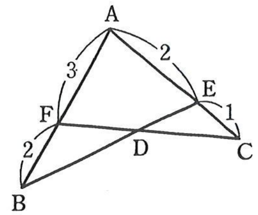
解答 (1) 5 ③　(2) 4 ③

解説

(1) G は重心であるから，線分 AD は △ABC の中線であり，点 D は辺 BC の中点である。したがって　BD＝DC＝5

(2) AG : GD＝2 : 1 であるから　$AG=\frac{2}{2+1}AD=\frac{2}{3}\times6=4$

5 右の図において，BD : DE を求めよ。



解答 2 : 1 ③

解説

△ABE と直線 FC にメネラウスの定理を用いると

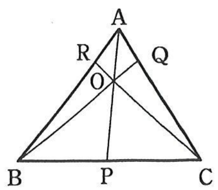
$$\frac{BD}{DE}\cdot\frac{EC}{CA}\cdot\frac{AF}{FB}=1 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{BD}{DE}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$$

$\frac{BD}{DE}=2$ より　BD : DE＝2 : 1

6 △ABC の辺 AB，AC を 1 : 3 に内分する点を，それぞれ R，Q とする。線分 BQ と CR の交点を O とし，直線 AO と辺 BC の交点を P とする。

(1) BP : PC を求めよ。

(2) 面積比 △OBC : △ABC を求めよ。



③　④

解答 (1) 1 : 1　(2) 3 : 5

解説

(1) △ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{3}=1 \quad \frac{BP}{PC}=1 \text{ より} \quad BP : PC=1 : 1$$

(2) △ABP と直線 RC にメネラウスの定理を用いると　$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

(1) より，BC : CP＝2 : 1 であるから　$\frac{2}{1}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{1}{3}=1$

$\frac{PO}{OA}=\frac{3}{2}$ より　PO : OA＝3 : 2 ② よって　PO : PA＝3 : 5

△OBC と △ABC は底辺 BC が共通で，高さの比は PO : PA に等しい。

したがって，面積比 △OBC : △ABC は PO : PA に等しく

△OBC : △ABC＝3 : 5

7 △ABC において，∠A＜∠B＜∠C とし，$a=6$，$b=8$，$c=x$ とするとき，x のとりうる値の範囲を求めよ。

等号ミス (−2)

文字ミス (−2)

$8<c<14$ △

解答 $8<x<14$ ④

解説

∠A＜∠B＜∠C から　$a<b<c$ ②

よって，$6<8<x$ であるから　$x>8$ ……①

三角形の存在条件により　$|6-8|<x<6+8$

どちらか

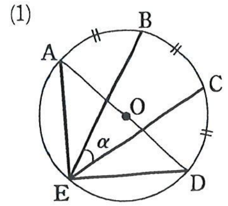
したがって　$2<x<14$ ……② ②

①，② から　$8<x<14$

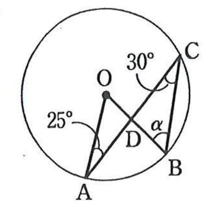
$x>2$，$x>-2$，$x<14$ 答 範囲 が とかない 者が多い

8 下の図において，α を求めよ。ただし，点 O は円の中心であり，(1) では $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$ である。

(1)



(2)



解答 (1) $\alpha=30°$ ③　(2) $\alpha=55°$ ③

解説

(1) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$ であるから　∠AEB＝∠BEC＝∠CED＝α

また，線分 AD は円 O の直径であるから

∠AED＝90°　すなわち　$3\alpha=90°$　よって　$\alpha=30°$

(2) 円周角の定理により　∠AOB＝2∠ACB＝2×30°＝60°

また，△OAD において

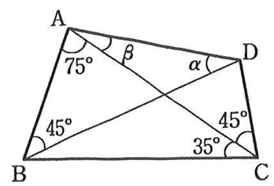
∠ODC＝∠AOD＋∠OAD＝60°＋25°＝85°

△BCD において

∠ODC＝∠DBC＋∠DCB＝α＋30°

ゆえに　$\alpha+30°=85°$　よって　$\alpha=55°$

9 右の図において，α，β を求めよ。



解答 $\alpha=35°$，$\beta=25°$ ⑥ (各3)

解説

∠ABD＝45°，∠ACD＝45° であるから　∠ABD＝∠ACD

よって，円周角の定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

この円において，円周角の定理により

α＝∠ACB＝35°

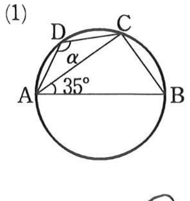
また，△ABD において，内角の和は 180° であるから

$45°+(75°+\beta)+35°=180°$

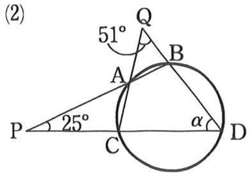
よって　$\beta=25°$

10 下の図において，α を求めよ。ただし，(1) で線分 AB は円の直径とする。

(1)



(2)



(3) (3)

解答 (1) 125° (2) 52°

解説

(1) AB が円の直径であるから　$\angle ACB=90°$

よって　$\angle ABC=180°-(35°+90°)=55°$

四角形 ABCD は円に内接するから

$\alpha=180°-55°=125°$

(2) 四角形 ACDB は円に内接するから　$\angle PAC=\alpha$

また　$\angle ACP=\alpha+51°$

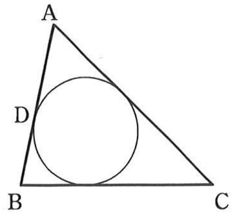
よって，△APC において　$\alpha+25°+(\alpha+51°)=180°$

これを解いて　$\alpha=52°$

別解 (1) B と D を結ぶと　$\angle BDC=\angle BAC=35°$，$\angle ADB=90°$

よって　$\alpha=\angle ADB+\angle BDC=90°+35°=125°$

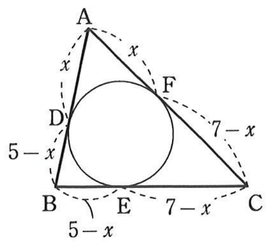
11 △ABC において，AB＝5，BC＝6，CA＝7 とする。この三角形の内接円と辺 AB との接点を D とするとき，AD の長さを求めよ。



解答 3 (3)

解説

△ABC の内接円と辺 BC，CA との接点をそれぞれ E，F とし，AD＝x とする。



円の接線の性質により　AF＝AD＝x

また　CF＝$7-x$，BD＝$5-x$

よって　CE＝CF＝$7-x$

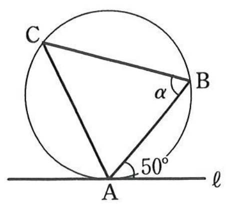
BE＝BD＝$5-x$

BC＝BE＋CE であるから　$6=(5-x)+(7-x)$

これを解いて　$x=3$

すなわち　AD＝3

12 下の図において，α を求めよ。ただし，直線 ℓ は点 A における円の接線であり，AC＝BCであるとする。



解答 $\alpha=65°$ (3)

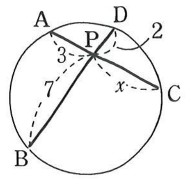
解説

円の接線と弦の作る角により　$\angle ACB=50°$

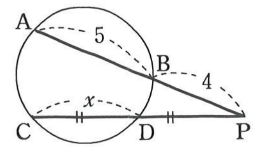
AC＝BC であるから　$\alpha=(180°-50°)\div 2=65°$

13 下の図において，x の値を求めよ。

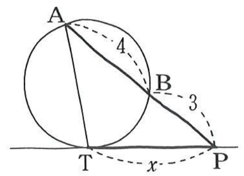
(1)



(2) CD＝DP



(3) PT は T における円の接線



解答 (1) $x=\dfrac{14}{3}$ (3)　(2) $x=3\sqrt{2}$ (3)　(3) $x=\sqrt{21}$ (3)

解説

(1) 方べきの定理により　PA·PC＝PB·PD　よって　$3\cdot x=7\cdot 2$

したがって　$x=\dfrac{14}{3}$

(1) $x^2=4\times5$ や $x^2=4\times9$ ミス多し.

(2) 方べきの定理により　PA·PB＝PC·PD　よって　$(4+5)\cdot 4=2x\cdot x$

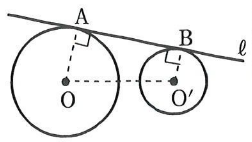
したがって　$x^2=18$　$x>0$ であるから　$x=3\sqrt{2}$

(3) 方べきの定理により　PA·PB＝PT^2　よって　$(4+3)\cdot 3=x^2$

したがって　$x^2=21$　$x>0$ であるから　$x=\sqrt{21}$

(3) $x^2=3\times4$ ミス多し

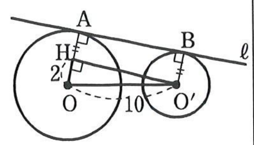
14 右の図において，直線 ℓ は 2 つの円 O，O′ の共通接線で，A，B は接点である。円 O，O′ の半径を，それぞれ 5，3 とし，O，O′ 間の距離を 10 とするとき，線分 AB の長さを求めよ。



解答 AB＝$4\sqrt{6}$ (4)

解説

右の図のように，O′ から線分 OA に垂線 O′H を下ろすと



OH＝OA－O′B＝5－3

＝2

△OO′H は直角三角形であるから

$O'H^2=OO'^2-OH^2$

よって　$AB=O'H=\sqrt{10^2-2^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

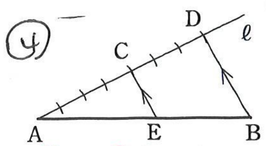
15 線分 AB が与えられたとき，線分 AB を 4 : 3 に内分する点を作図せよ。ただし，作図の手順についての説明は書かなくてよいが，作図に用いた線は残しておくこと。

解説

① A を通り，直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。

② ℓ 上に，AC : CD＝4 : 3 となるように点 C，D をとる。ただし，C は線分 AD 上にとる。

③ C を通り，直線 BD に平行な直線を引き，線分 AB との交点を E とする。点 E が求める点である。



(4)

このとき，EC∥BD から

AE : EB＝AC : CD＝4 : 3

よって，点 E は線分 AB を 4 : 3 に内分する点である。

平行線の作図をしていない →ダメ

← 点と点を つないでいない者がいる

16 空間内の異なる 2 つの直線 ℓ，m と異なる 2 つの平面 α，β について，次の記述は常に正しいかどうか答えよ。（答えだけでよい）

(1) $\ell\perp\alpha$，$m\perp\alpha$ ならば $\ell\perp m$　　(2) $\ell\perp\alpha$，$\ell\perp\beta$ ならば $\alpha /\!/ \beta$

(3) $\ell /\!/ \alpha$，$m /\!/ \alpha$ ならば $\ell /\!/ m$

(2), (3) 間違い多し

解答 (1) 正しくない，理由：略 (3)　(2) 正しい (3)　(3) 正しくない，理由：略 (3)

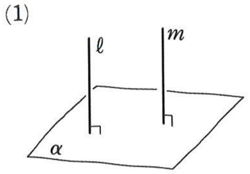
解説

(1) $\ell\perp\alpha$，$m\perp\alpha$ ならば $\ell /\!/ m$ である。

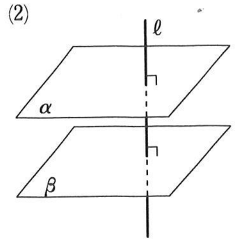
よって，正しくない。

(2) 正しい。

(1)

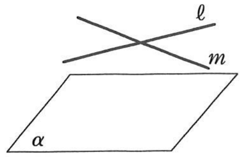


(2)

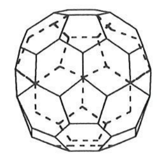


(3) $\ell /\!/ \alpha$，$m /\!/ \alpha$ であっても，ℓ と m が交わることがある。

よって，正しくない。



17 右の図の立体は，正五角形が 12 個，正六角形が 20 個でできている凸多面体である。どの頂点にも 1 個の正五角形の面と 2 個の正六角形の面が集まっている。この多面体の頂点の数，辺の数を求めよ。



解答 頂点の数 60，辺の数 90 (6) (各3)

解説

1 つの頂点に 3 つの面が集まっているから，求める頂点の数は

$(12\times5+20\times6)\div3=60$

1 つの辺に 2 つの面が集まっているから，求める辺の数は

$(12\times5+20\times6)\div2=90$

したがって　頂点の数は 60，　辺の数は 90

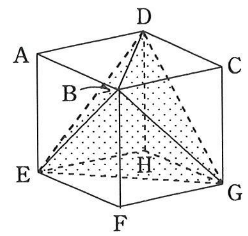
別解 頂点の数は，正五角形の頂点の総数に等しいから　$12\times5=60$

辺の数を e とすると，オイラーの多面体定理により　$60-e+(12+20)=2$

よって　$e=90$

18 1 辺の長さが a の正四面体の外接球の半径 R を求めよ。

（外接球とは，正四面体の 4 つの頂点を通る球である）



解答 $R=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$ (5)

解説

正四面体 BDEG は，正六面体 ABCD－EFGH に埋め込まれている。

よって，正四面体 BDEG の外接球は正六面体 ABCD－EFGH の外接球と同じであり，その中心は対角線AGの中点である。ゆえに，外接球の半径は $\dfrac{1}{2}$ AGに等しい。

正四面体の 1 辺の長さが a であるから，正六面体の 1 辺の長さは $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ である。

よって　$AB=EF=FG=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

したがって，$AG=\sqrt{AE^2+EG^2}=\sqrt{AE^2+(EF^2+FG^2)}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$ (2)

求める外接球の半径 R は　$R=\dfrac{1}{2}AG=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$