数学演習（図形の性質）Ｒ３．２．５　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1 (1)　$\angle C=90^\circ$ である直角三角形 ABC の垂心の位置はどこか。

(2)　△ABC は直角三角形でないとする。△ABC の垂心を H とするとき，△HBC の垂心の位置はどこか。

(3)　鋭角三角形 ABC の垂心を H とする。$\angle A=60^\circ$ であるとき，$\angle$ACH，$\angle$BHC の大きさをそれぞれ求めよ。

2 △PQR の辺 QR，RP，PQ の中点を，それぞれ A，B，C とする。△ABC において，3 つの頂点から向かい合う辺に下ろした 3 本の垂線は，△PQR の外心で交わることを証明せよ。

3 △ABC の 3 つの中線を AL，BM，CN とするとき，

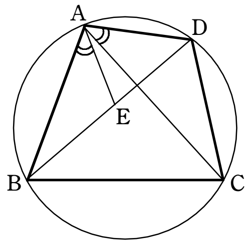
$\mathrm{AL}+\mathrm{BM}+\mathrm{CN}>\dfrac{3}{4}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$ であることを証明せよ。

$\boxed{4}$ 四角形 ABCD が円に内接するとき，対角線 BD 上に $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{CAD}$ となるような点 E をとる。次のことを証明せよ。

(1)　$\triangle\mathrm{ABE}\backsim\triangle\mathrm{ACD}$

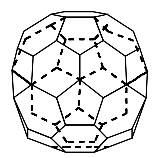
(2)　$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{AED}$

(3)　$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$



$\boxed{5}$ 与えられた線分 AB に対して，線分 AB を 2 : 1 に内分する点 Cを作図せよ。手順は書かなくて良いが，作図で用いた線は残しておくこと。

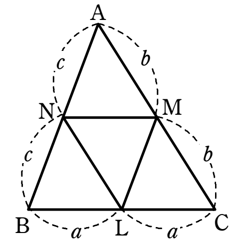
$\boxed{6}$ 右の図の立体は，正五角形が 12 個，正六角形が 20 個でできている凸多面体である。どの頂点にも 1 個の正五角形の面と 2 個の正六角形の面が集まっている。この多面体の頂点の数，辺の数を求めよ。



$\boxed{7}$ 3 辺の長さが $\mathrm{BC}=2a$，$\mathrm{CA}=2b$，$\mathrm{AB}=2c$ であるような鋭角三角形 ABC の 3 辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N とする。線分 LM，MN，NL に沿って三角形を折り曲げ，四面体を作る。その際，線分 BL と CL，CM と AM，AN と BN はそれぞれ同一視されて，長さが a，b，c の辺になるものとする。

(1)　この四面体の体積 V を a，b，c を用いて表せ。

(2)　この四面体の外接球の半径 R を a，b，c を用いて表せ。



数学演習（図形の性質）Ｒ３．２．５　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1 (1)　$\angle C=90^\circ$ である直角三角形 ABC の垂心の位置はどこか。

(2)　$\triangle$ABC は直角三角形でないとする。$\triangle$ABC の垂心を H とするとき，$\triangle$HBC の垂心の位置はどこか。

(3)　鋭角三角形 ABC の垂心を H とする。$\angle A=60^\circ$ であるとき，$\angle$ACH，$\angle$BHC の大きさをそれぞれ求めよ。

解答　(1)　点 C　(2)　点 A　(3)　$\angle ACH=30^\circ$，$\angle BHC=120^\circ$

解説

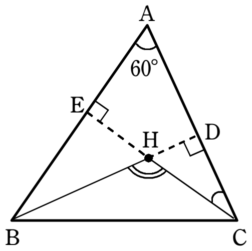
(1)　$\triangle$ABC において，点 A，B からそれぞれ向かい合う辺に垂線を下ろすと，点 C で交わる。

よって，垂心は点 C である。

(2)　$\triangle$HBC において，点 B，C からそれぞれ向かい合う辺の延長に垂線を下ろすと，点 A で交わる。

よって，垂心は点 A である。

(3)　BH の延長と辺 CA の交点を D，CH の延長と辺 AB の交点を E とする。



H は $\triangle$ABC の垂心であるから

$$BD\perp CA,\quad CE\perp AB$$

よって　$\angle BDC=90^\circ$，$\angle AEC=90^\circ$

$\triangle$AEC において，内角の和は 180° であるから

$$\angle ACH=180^\circ-(60^\circ+90^\circ)=30^\circ$$

また，$\triangle$CDH において

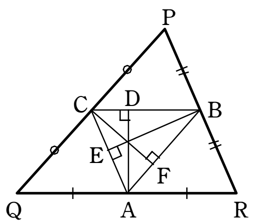
$$\angle BHC=\angle ACH+90^\circ=30^\circ+90^\circ=120^\circ$$

2 $\triangle$PQR の辺 QR，RP，PQ の中点を，それぞれ A，B，C とする。$\triangle$ABC において，3 つの頂点から向かい合う辺に下ろした 3 本の垂線は，$\triangle$PQR の外心で交わることを証明せよ。

解説

中点連結定理により

$$CB /\!/ QR,\quad CA /\!/ PR,\quad AB /\!/ QP$$



$\triangle$ABC において，点 A から辺 BC に下ろした垂線を AD とすると，CB$/\!/$QR から

$$AD\perp QR$$

よって，直線 AD は辺 QR の垂直二等分線である。

同様に，$\triangle$ABC において，点 B，C からその向かい合う辺に下ろした垂線を，それぞれ BE，CF とすると

$$BE\perp RP,\quad CF\perp PQ$$

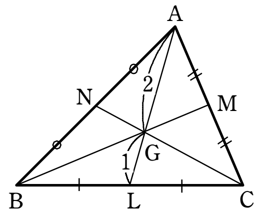
したがって，$\triangle$ABC の各頂点からその向かい合う辺に下ろした 3 本の垂線は，$\triangle$PQR の各辺の垂直二等分線と一致し，$\triangle$PQR の外心で交わる。

3 $\triangle$ABC の 3 つの中線を AL，BM，CN とするとき，

$AL+BM+CN>\dfrac{3}{4}(AB+BC+CA)$ であることを証明せよ。

解説

$\triangle$ABC の重心を G とする。



$\triangle$ABG，$\triangle$BCG，$\triangle$CAG において

$$AG+BG>AB$$
$$BG+CG>BC$$
$$CG+AG>CA$$

3 つの不等式の辺々を加えると

$$2(AG+BG+CG)>AB+BC+CA$$

よって　$AG+BG+CG>\dfrac{1}{2}(AB+BC+CA)$

ここで，$AG=\dfrac{2}{3}AL$，$BG=\dfrac{2}{3}BM$，$CG=\dfrac{2}{3}CN$ であるから

$$\frac{2}{3}(AL+BM+CN)>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$$

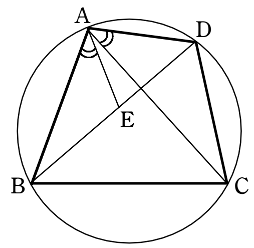
よって　$AL+BM+CN>\dfrac{3}{4}(AB+BC+CA)$

4 四角形 ABCD が円に内接するとき，対角線 BD 上に $\angle BAE=\angle CAD$ となるような点 E をとる。次のことを証明せよ。

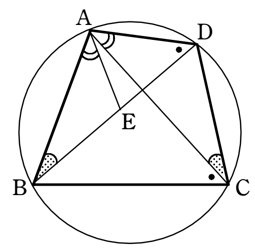
(1)　$\triangle ABE\backsim\triangle ACD$

(2)　$\triangle ABC\backsim\triangle AED$

(3)　$AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD$



解説



(1)　$\triangle$ABE と $\triangle$ACD において

$$\angle BAE=\angle CAD,\quad \angle ABE=\angle ACD$$

よって　$\triangle ABE\backsim\triangle ACD$

(2)　$\angle BAC=\angle BAE+\angle EAC$

$$=\angle CAD+\angle EAC=\angle EAD$$

$\triangle$ABC と $\triangle$AED において

$$\angle BAC=\angle EAD,\quad \angle ACB=\angle ADE$$

よって　$\triangle ABC\backsim\triangle AED$

(3)　(1) から　$AB:BE=AC:CD$

ゆえに　$AB\cdot CD=AC\cdot BE$　……①

(2) から　$BC:CA=ED:DA$

よって　$BC\cdot DA=CA\cdot ED$　……②

①，② の辺々を加えて

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BE+CA\cdot ED$$
$$=AC(BE+ED)=AC\cdot BD$$

5 与えられた線分 AB に対して，線分 AB を 2 : 1 に内分する点 Cを作図せよ。

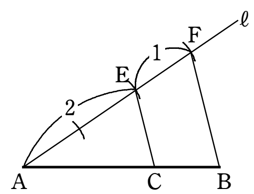
手順は書かなくて良いが，作図で用いた線は残しておくこと。

解説

①　点 A を通り，直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。

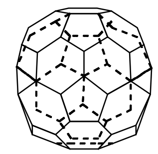
②　ℓ 上に，A から等間隔に点をとり，2 番目の点を E，3 番目の点を F とする。このとき，AE : EF＝2 : 1 となる。

③　E を通り，直線 BF に平行な直線を引き，線分 AB との交点を C とする。点 C が求める点である。



（BF$/\!/$CE より AC : CB＝AE : EF であるから，点 C は線分 AB を 2 : 1 に内分する点である。）

6 右の図の立体は，正五角形が 12 個，正六角形が 20 個でできている凸多面体である。どの頂点にも 1 個の正五角形の面と 2 個の正六角形の面が集まっている。この多面体の頂点の数，辺の数を求めよ。



解答　頂点の数 60，辺の数 90

解説

1 つの頂点に 3 つの面が集まっているから，求める頂点の数は

$$(12\times5+20\times6)\div3=60$$

1 つの辺に 2 つの面が集まっているから，求める辺の数は

$$(12\times5+20\times6)\div2=90$$

したがって　頂点の数は 60，　辺の数は 90

別解　頂点の数は，正五角形の頂点の総数に等しいから

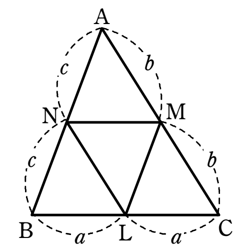
$$12\times5=60$$

辺の数を e とすると，オイラーの多面体定理により

$$60-e+(12+20)=2$$

よって　$e=90$

7 3 辺の長さが $BC=2a$，$CA=2b$，$AB=2c$ であるような鋭角三角形 ABC の 3 辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N とする。線分 LM，MN，NL に沿って三角形を折り曲げ，四面体を作る。その際，線分 BL と CL，CM と AM，AN と BN はそれぞれ同一視されて，長さが a，b，c の辺になるものとする。



(1)　この四面体の体積 V を a，b，c を用いて表せ。

(2)　この四面体の外接球の半径 R を a，b，c を用いて表せ。

解答　(1)　$V=\dfrac{1}{12}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$

(2)　$R=\dfrac{1}{4}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$

解説

(1)　組み立てた四面体の各面は鋭角三角形であるから，その 3 辺 a，b，c について

$$a^2+b^2>c^2,\quad b^2+c^2>a^2,\quad c^2+a^2>b^2$$

が成り立つ。したがって

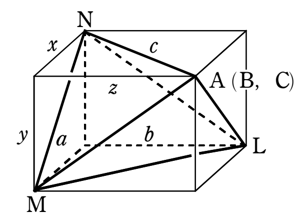
$$x^2+y^2=a^2,\quad y^2+z^2=b^2,\quad z^2+x^2=c^2$$

を満たす正の数 x，y，z が存在して

$$x=\sqrt{\frac{c^2+a^2-b^2}{2}},\quad y=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}},\quad z=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$$

と定まる。

ここで，垂直に交わる 3 辺の長さが x，y，z である直方体を作ると，右の図のように直方体の 4 つの頂点を共有する四面体は，4 面とも 3 辺の長さが a，b，c の三角形となる。



この四面体は，直方体から四面体の各面で 4 つの三角錐を切断して取り除くことで得られる。

取り除く 4 つの三角錐はすべて合同で，

その 1 つの体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}xy\cdot z=\frac{1}{6}xyz$$

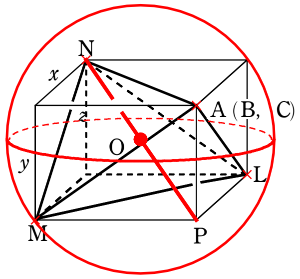
よって，求める四面体の体積 V は

$$V=xyz-4\times\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{3}xyz$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{c^2+a^2-b^2}{2}}\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$$

(2)　対角線NPの中点をOとする。点Oから四面体の各頂点への距離は等しいので点Oが外接球の中心となる。



$\mathrm{NP}=\sqrt{\mathrm{NM}^2+\mathrm{MP}^2}=\sqrt{(x^2+y^2)+z^2}$ であり

(1)より　$x^2+y^2=a^2$，　$y^2+z^2=b^2$，　$z^2+x^2=c^2$ の辺々を足すと

$2(x^2+y^2+z^2)=a^2+b^2+c^2$　より　$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$

よって外接球の半径 R は

$$R=\frac{1}{2}\mathrm{NP}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)}=\frac{1}{4}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$$

参考

このような各面が合同な四面体を等面四面体という。等面四面体は直方体に埋め込まれるため，直方体を利用することで，体積等を計算することができます。

　問題文で与えられている場所を具体的に答える（作図の問題ではない）　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

1 (1) $\angle C=90°$ である直角三角形ABCの垂心の位置はどこか。

(2) △ABCは直角三角形でないとする。△ABCの垂心をHとするとき，△HBCの垂心の位置はどこか。

(3) 鋭角三角形ABCの垂心をHとする。$\angle A=60°$ であるとき，$\angle ACH$，$\angle BHC$ の大きさをそれぞれ求めよ。

解答　(1) 点C　(2) 点A　(3) $\angle ACH=30°$，$\angle BHC=120°$

解説

(1) △ABCにおいて，点A，Bからそれぞれ向かい合う辺に垂線を下ろすと，点Cで交わる。
よって，垂心は点Cである。

(2) △HBCにおいて，点B，Cからそれぞれ向かい合う辺の延長に垂線を下ろすと，点Aで交わる。
よって，垂心は点Aである。

(3) BHの延長と辺CAの交点をD，CHの延長と辺ABの交点をEとする。
Hは△ABCの垂心であるから

$BD\perp CA$，$CE\perp AB$

よって　$\angle BDC=90°$，$\angle AEC=90°$

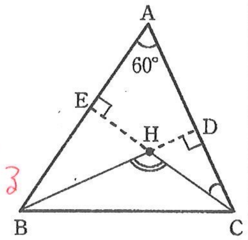
△AECにおいて，内角の和は180°であるから

$\angle ACH=180°-(60°+90°)=30°$

また，△CDHにおいて

$\angle BHC=\angle ACH+90°=30°+90°=120°$

∠BHC = 60°×2 と思っている人がいる



2 △PQRの辺QR，RP，PQの中点を，それぞれA，B，Cとする。△ABCにおいて，3つの頂点から向かい合う辺に下ろした3本の垂線は，△PQRの外心で交わることを証明せよ。

これがない者多し

解説

中点連結定理により

$CB /\!/ QR$，$CA /\!/ PR$，$AB /\!/ QP$

△ABCにおいて，点Aから辺BCに下ろした垂線をADとすると，$CB /\!/ QR$ から

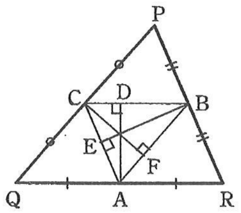
$AD\perp QR$

よって，直線ADは辺QRの垂直二等分線である。

同様に，△ABCにおいて，点B，Cからその向かい合う辺に下ろした垂線を，それぞれBE，CFとすると

$BE\perp RP$，$CF\perp PQ$

したがって，△ABCの各頂点からその向かい合う辺に下ろした3本の垂線は，△PQRの各辺の垂直二等分線と一致し，△PQRの外心で交わる。



3 △ABCの3つの中線をAL，BM，CNとするとき，

$AL+BM+CN>\frac{3}{4}(AB+BC+CA)$ であることを証明せよ。

解説

△ABCの重心をGとする。

△ABG，△BCG，△CAGにおいて

$AG+BG>AB$

$BG+CG>BC$

$CG+AG>CA$

3つの不等式の辺々を加えると

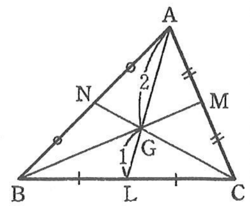
$2(AG+BG+CG)>AB+BC+CA$

よって　$AG+BG+CG>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$

ここで，$AG=\frac{2}{3}AL$，$BG=\frac{2}{3}BM$，$CG=\frac{2}{3}CN$ であるから

$\frac{2}{3}(AL+BM+CN)>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$

よって　$AL+BM+CN>\frac{3}{4}(AB+BC+CA)$



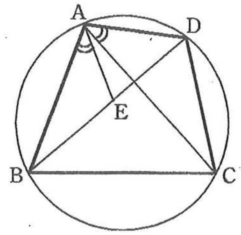
4 四角形ABCDが円に内接するとき，対角線BD上に $\angle BAE=\angle CAD$ となるような点Eをとる。次のことを証明せよ。

(1) △ABE∽△ACD

(2) △ABC∽△AED

(3) $AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD$

トレミーの定理



解説

(1) △ABEと△ACDにおいて

$\angle BAE=\angle CAD$，$\angle ABE=\angle ACD$

よって　△ABE∽△ACD

(2) $\angle BAC=\angle BAE+\angle EAC$

$=\angle CAD+\angle EAC=\angle EAD$

△ABCと△AEDにおいて

$\angle BAC=\angle EAD$，$\angle ACB=\angle ADE$

よって　△ABC∽△AED

(3) (1)から　$AB:BE=AC:CD$

ゆえに　$AB\cdot CD=AC\cdot BE$ ……①

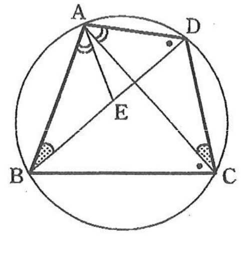
(2)から　$BC:CA=ED:DA$

よって　$BC\cdot DA=CA\cdot ED$ ……②

①，②の辺々を加えて

$AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BE+CA\cdot ED$

$=AC(BE+ED)=AC\cdot BD$



5 与えられた線分ABに対して，線分ABを2：1に内分する点Cを作図せよ。
手順は書かなくて良いが，作図で用いた線は残しておくこと。

ABが与えられていることに注意

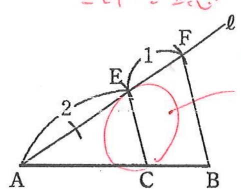
解説

① 点Aを通り，直線ABと異なる半直線 ℓ を引く。

② ℓ 上に，Aから等間隔に点をとり，2番目の点をE，3番目の点をFとする。
このとき，$AE:EF=2:1$ となる。

③ Eを通り，直線BFに平行な直線を引き，線分ABとの交点をCとする。点Cが求める点である。

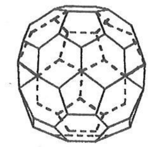
この線を作図しない人がいる



重心を用いた解答がある

（$BF /\!/ CE$ より $AC:CB=AE:EF$ であるから，点Cは線分ABを2：1に内分する点である。）

6 右の図の立体は，正五角形が12個，正六角形が20個でできている凸多面体である。どの頂点にも1個の正五角形の面と2個の正六角形の面が集まっている。この多面体の頂点の数，辺の数を求めよ。



解答　頂点の数 60，辺の数 90

4で割っている人がいる

解説

1つの頂点に3つの面が集まっているから，求める頂点の数は

$(12\times5+20\times6)\div3=60$

1つの辺に2つの面が集まっているから，求める辺の数は

$(12\times5+20\times6)\div2=90$

したがって　頂点の数は60，辺の数は90

別解　頂点の数は，正五角形の頂点の総数に等しいから

$12\times5=60$

辺の数を e とすると，オイラーの多面体定理により

$60-e+(12+20)=2$

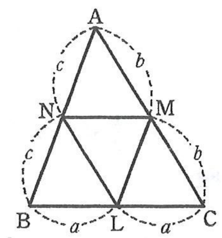
よって　$e=90$

どっちがどっちの答えか分からない者多し

7 3辺の長さが $BC=2a$，$CA=2b$，$AB=2c$ であるような鋭角三角形ABCの3辺BC，CA，ABの中点をそれぞれL，M，Nとする。線分LM，MN，NLに沿って三角形を折り曲げ，四面体を作る。その際，線分BLとCL，CMとAM，ANとBNはそれぞれ同一視されて，長さが a，b，c の辺になるものとする。

(1) この四面体の体積 V を a，b，c を用いて表せ。

(2) この四面体の外接球の半径 R を a，b，c を用いて表せ。



解答　(1) $V=\frac{1}{12}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$

(2) $R=\frac{1}{4}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$

(2-2-13) 等面四面体

解説

(1) 組み立てた四面体の各面は鋭角三角形であるから，その3辺 a，b，c について

$a^2+b^2>c^2$，$b^2+c^2>a^2$，$c^2+a^2>b^2$

が成り立つ。したがって

$x^2+y^2=a^2$，$y^2+z^2=b^2$，$z^2+x^2=c^2$

を満たす正の数 x，y，z が存在して

$x=\sqrt{\frac{c^2+a^2-b^2}{2}}$，$y=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$，$z=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$

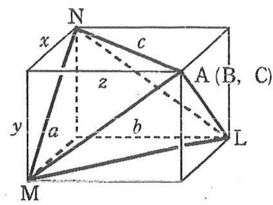
と定まる。

ここで，垂直に交わる3辺の長さが x，y，z である直方体を作ると，右の図のように直方体の4つの頂点を共有する四面体は，4面とも3辺の長さが a，b，c の三角形となる。

この四面体は，直方体から四面体の各面で4つの三角錐を切断して取り除くことで得られる。

取り除く4つの三角錐はすべて合同で，

その1つの体積は



$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}xy\cdot z=\frac{1}{6}xyz$$

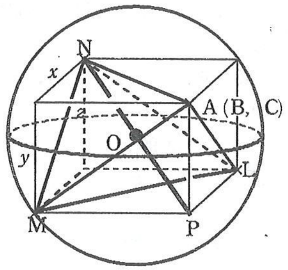
よって，求める四面体の体積 V は

$$V=xyz-4\times\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{3}xyz$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{c^2+a^2-b^2}{2}}\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$$

(2) 対角線NPの中点をOとする。点Oから四面体の各頂点への距離は等しいので点Oが外接球の中心となる。



$\mathrm{NP}=\sqrt{\mathrm{NM}^2+\mathrm{MP}^2}=\sqrt{(x^2+y^2)+z^2}$ であり

(1)より　$x^2+y^2=a^2$,　$y^2+z^2=b^2$,　$z^2+x^2=c^2$ の辺々を足すと

$2(x^2+y^2+z^2)=a^2+b^2+c^2$　より　$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$

よって外接球の半径 R は

$$R=\frac{1}{2}\mathrm{NP}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)}=\frac{1}{4}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$$

$\boxed{\text{参考}}$

このような各面が合同な四面体を等面四面体という。等面四面体は直方体に埋め込まれるため，直方体を利用することで，体積等を計算することができます。