数学演習（確率）R２．１２．５　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 男子 4 人と女子 3 人がくじ引きで 1 列に並ぶとき，次の確率を求めよ。

(1) 男子と女子が交互に並ぶ確率

(2) 両端のうち，少なくとも一方に女子が並ぶ確率

$\boxed{2}$ A，B，C の 3 人がじゃんけんを 1 回するとき，次の確率を求めよ。

(1) Aだけが勝つ確率　　(2) 全員が違う手を出す確率

(3) 誰も勝たない，すなわちあいこになる確率

$\boxed{3}$ A，B，C，D，E，F，G，H の 8 文字を無作為に横 1 列に並べるとき，次の場合の確率を求めよ。

(1) A と B が両端にある。　　(2) A は B より左で，B は C より左にある。

$\boxed{4}$ 1 から 100 までの 100 枚の番号札から 1 枚引く。

(1) 番号が 3 の倍数または 5 の倍数である確率を求めよ。

(2) 番号が 3 の倍数でも 5 の倍数でもない確率を求めよ。

$\boxed{5}$ 赤玉 5 個，白玉 4 個，黄玉 3 個の入った袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき，次の場合の確率を求めよ。

(1) 黄玉が 2 個以上出る。　　(2) 3 個とも同じ色の玉が出る。

$\boxed{6}$ 1 個のさいころを 4 回投げるとき，出る目の最大値が 3 である確率

$\boxed{7}$ A，B，C の 3 人が，ある検定試験に合格する確率がそれぞれ $\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{8}$ であるとする。次の場合の確率を求めよ。

(1) 少なくとも 1 人が合格する。　　(2) 2 人だけが合格する。

$\boxed{8}$ 1 個のさいころを 5 回投げるとき，次の場合の確率を求めよ。

(1) 奇数の目がちょうど 2 回出る。　　(2) 5 以上の目がちょうど 4 回出る。

$\boxed{9}$ あるテストで，○ か × かを答える問題が 8 問出題された。でたらめに ○ × を答えるとき，7 問以上を正解する確率を求めよ。

$\boxed{10}$ 赤玉 2 個と白玉 4 個と青玉 2 個が入った袋から 1 個の玉を取り出し，色を調べてからもとに戻すことを 6 回行う。このとき，赤玉が 2 回，白玉が 3 回，青玉が 1 回出る確率を求めよ。

$\boxed{11}$ A と B がテニスの試合を行うとき，各ゲームで A，B が勝つ確率は，それぞれ $\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{3}$ であるとする。3 ゲームを先取した方が試合の勝者になるとするとき，A が勝者になる確率を求めよ。

$\boxed{12}$ 赤玉 6 個，白玉 4 個が入った袋の中から，もとに戻さないで 1 個ずつ 2 回取り出すとき，最初の玉が赤である事象を A，2 番目の玉が白である事象を B とする。次の確率を求めよ。

(1)　$P_A(B)$　　(2)　$P_A(\overline{B})$　　(3)　$P_{\overline{A}}(B)$　　(4)　$P_{\overline{A}}(\overline{B})$

$\boxed{13}$ 袋の中に赤玉 3 個，白玉 2 個が入っている。A がこの袋から 1 個取り出し，取り出した玉と同じ色の玉を 2 個追加して 3 個とも袋に戻す。次に，B がこの袋から 1 個取り出すとき，玉の色が赤である確率を求めよ。

$\boxed{14}$ A の袋には白玉 4 個，黒玉 5 個，B の袋には白玉 3 個，黒玉 2 個が入っている。A の袋から同時に 2 個を取り出して B の袋に入れ，よく混ぜた後，B の袋から同時に 2 個を取り出して A の袋に入れる。このとき，A の袋の中の白玉，黒玉の数が初めと変わらない確率を求めよ。

$\boxed{15}$ 白玉 6 個，赤玉 5 個が入った袋の中から，もとに戻さないで 1 個ずつ続けて 2 回玉を取り出す。2 回目の玉が赤であるとき，1 回目の玉が赤である確率を求めよ。

$\boxed{16}$ ある品物を製造するとき，A 工場の製品には 5 %，B 工場の製品には 3 % の不合格品が含まれる。A 工場の製品 100 個と B 工場の製品 150 個を混ぜた中から取り出した 1 個の製品について，次の確率を求めよ。

(1)　A 工場の不合格品である確率　　(2)　不合格品である確率

(3)　不合格品であったとき，A 工場の製品である確率

$\boxed{17}$ 1 枚の硬貨を投げて，表が出たときは数直線上の点 P を正の向きに 2 だけ進め，裏が出たときは P を負の向きに 1 だけ進める。硬貨を 9 回投げ終わったとき，P が最初の位置にもどっている確率を求めよ。

$\boxed{18}$ さいころを続けて 100 回投げるとき，1 の目がちょうど k 回 $(0 \leqq k \leqq 100)$ 出る確率は

${}_{100}\mathrm{C}_k \times \dfrac{{}^{ア}\boxed{}}{6^{100}}$ であり，この確率が最大になるのは $k = {}^{イ}\boxed{}$ のときである。

1 男子4人と女子3人がくじ引きで1列に並ぶとき，次の確率を求めよ。

(1)　男子と女子が交互に並ぶ確率

(2)　両端のうち，少なくとも一方に女子が並ぶ確率　　解答　(1)　$\dfrac{1}{35}$　　(2)　$\dfrac{5}{7}$

(1)　7人を1列に並べる順列は $7!$ 通りある。

男子と女子が交互に並ぶのは 男女男女男女男 の場合で，このような並び方は $4!\times 3!$ 通りある。

よって，求める確率は　$\dfrac{4!\times 3!}{7!}=\dfrac{1}{35}$

(2)　両端に男子が並ぶ確率は　$\dfrac{{}_4P_2\times 5!}{7!}=\dfrac{2}{7}$

少なくとも一方に女子が並ぶ事象は，両端に男子が並ぶ事象の余事象であるから，

求める確率は　$1-\dfrac{2}{7}=\dfrac{5}{7}$

2 A，B，Cの3人がじゃんけんを1回するとき，次の確率を求めよ。

(1)　Aだけが勝つ確率　　(2)　全員が違う手を出す確率

(3)　誰も勝たない，すなわちあいこになる確率　　解答　(1)　$\dfrac{1}{9}$　　(2)　$\dfrac{2}{9}$　　(3)　$\dfrac{1}{3}$

3人の手の出し方は　$3\times 3\times 3=27$ (通り)

(1)　Aだけが勝つ手の出し方は3通り。

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{27}=\dfrac{1}{9}$

(2)　全員が違う手の出し方は　$3!=6$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$

(3)　あいこになるのは，全員が違う手か，全員が同じ手を出す場合で

$6+3=9$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$

3 A，B，C，D，E，F，G，Hの8文字を無作為に横1列に並べるとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　AとBが両端にある。　　(2)　AはBより左で，BはCより左にある。

解答　(1)　$\dfrac{1}{28}$　　(2)　$\dfrac{1}{6}$

8文字を横1列に並べる方法は　$8!$ 通り

(1)　両端のA，Bの並べ方は　2通り

残り6文字の並べ方は　$6!$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{2\times 6!}{8!}=\dfrac{2}{8\cdot 7}=\dfrac{1}{28}$

(2)　A，B，Cを同じ文字□と考え，□3個と残りの5文字を1列に並べる順列を作り，□に左からA，B，Cを順に入れると，AはBより左で，BはCより左にある並べ方になる。

よって，この場合の数は　$\dfrac{8!}{3!}$ 通り

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{8!}{3!}\div 8!=\dfrac{1}{3!}=\dfrac{1}{6}$

4 1から100までの100枚の番号札から1枚引く。

(1)　番号が3の倍数または5の倍数である確率を求めよ。

(2)　番号が3の倍数でも5の倍数でもない確率を求めよ。　　解答　(1)　$\dfrac{47}{100}$　　(2)　$\dfrac{53}{100}$

番号が3の倍数であるという事象を A，5の倍数であるという事象を B とすると

$A=\{3\cdot 1,\ 3\cdot 2,\ 3\cdot 3,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot 33\}$

$B=\{5\cdot 1,\ 5\cdot 2,\ 5\cdot 3,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot 20\}$

$A\cap B=\{15\cdot 1,\ 15\cdot 2,\ 15\cdot 3,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot 6\}$

(1)　求める確率は　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{33}{100}+\dfrac{20}{100}-\dfrac{6}{100}=\dfrac{47}{100}$

(2)　求める確率は　$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$=1-\dfrac{47}{100}=\dfrac{53}{100}$

5 赤玉5個，白玉4個，黄玉3個の入った袋から同時に3個の玉を取り出すとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　黄玉が2個以上出る。　　(2)　3個とも同じ色の玉が出る。

解答　(1)　$\dfrac{7}{55}$　　(2)　$\dfrac{3}{44}$

全部の12個から3個取る組合せは　${}_{12}C_3$ 通り

(1)　「黄玉が2個以上出る」という事象は

「黄玉が2個出る」という事象 A，「黄玉が3個出る」という事象 B

の和事象 $A\cup B$ である。

$P(A)=\dfrac{{}_3C_2\times{}_9C_1}{{}_{12}C_3}=\dfrac{27}{220}$，　$P(B)=\dfrac{{}_3C_3}{{}_{12}C_3}=\dfrac{1}{220}$

であり，A，B は互いに排反であるから

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{27}{220}+\dfrac{1}{220}=\dfrac{7}{55}$

(2)　「3個とも同じ色の玉が出る」という事象は，

「3個とも赤玉が出る」という事象 A，「3個とも白玉が出る」という事象 B，

「3個とも黄玉が出る」という事象 C

の和事象 $A\cup B\cup C$ である。

A，B，C は互いに排反であるから

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=\dfrac{{}_5C_3}{{}_{12}C_3}+\dfrac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3}+\dfrac{{}_3C_3}{{}_{12}C_3}$

$=\dfrac{10}{220}+\dfrac{4}{220}+\dfrac{1}{220}=\dfrac{3}{44}$

6 1個のさいころを4回投げるとき，出る目の最大値が3である確率

解答　$\dfrac{65}{1296}$

出る目の最大値が3であるという事象は，出る目がすべて3以下であるという事象から，出る目がすべて2以下であるという事象を除いたものと考えられる。

さいころを1回投げるとき，出る目が3以下である確率は $\dfrac{3}{6}$，2以下である確率は $\dfrac{2}{6}$

であるから，求める確率は　$\left(\dfrac{3}{6}\right)^4-\left(\dfrac{2}{6}\right)^4=\dfrac{3^4-2^4}{6^4}=\dfrac{65}{1296}$

7 A，B，Cの3人が，ある検定試験に合格する確率がそれぞれ $\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{5}{8}$ であるとする。

次の場合の確率を求めよ。

(1)　少なくとも1人が合格する。　　(2)　2人だけが合格する。

解答　(1)　$\dfrac{61}{64}$　　(2)　$\dfrac{29}{64}$

(1)　「少なくとも1人が合格する」という事象は，「3人とも不合格である」という事象の余事象である。

3人とも不合格である確率は

$\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{5}{8}\right)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{64}$

よって，求める確率は　$1-\dfrac{3}{64}=\dfrac{61}{64}$

(2)　3人のうち，2人だけが合格するのは，次の[1]～[3]のいずれかの場合である。

[1]　A，Bが合格，Cが不合格の場合

その確率は　$\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{5}{8}\right)=\dfrac{9}{64}$

[2]　A，Cが合格，Bが不合格の場合

その確率は　$\dfrac{3}{4}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{15}{64}$

[3]　B，Cが合格，Aが不合格の場合

その確率は　$\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{5}{64}$

[1]～[3]は互いに排反であるから，求める確率は　$\dfrac{9}{64}+\dfrac{15}{64}+\dfrac{5}{64}=\dfrac{29}{64}$

8 1個のさいころを5回投げるとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　奇数の目がちょうど2回出る。　　(2)　5以上の目がちょうど4回出る。

解答　(1)　$\dfrac{5}{16}$　　(2)　$\dfrac{10}{243}$

(1)　さいころを1回投げるとき，奇数の目が出る確率は　$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

よって，求める確率は

${}_5C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{5-2}=10\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{16}$

(2)　さいころを1回投げるとき，5以上の目が出る確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

よって，求める確率は

${}_5C_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^{5-4}=5\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{243}$

9 あるテストで，○か×かを答える問題が8問出題された。でたらめに○×を答えるとき，7問以上を正解する確率を求めよ。　　解答　$\dfrac{9}{256}$

7問以上を正解するのは，次の[1]，[2]のどちらかの場合である。

[1]　ちょうど7問を正解する場合

その確率は　${}_8C_7\left(\dfrac{1}{2}\right)^7\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{8-7}=8\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^7\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{8}{256}$

[2]　8問すべてを正解する場合

その確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^8=\dfrac{1}{256}$

[1]，[2]は互いに排反であるから，求める確率は

$\dfrac{8}{256}+\dfrac{1}{256}=\dfrac{9}{256}$

10 赤玉2個と白玉4個と青玉2個が入った袋から1個の玉を取り出し，色を調べてからもとに戻すことを6回行う。このとき，赤玉が2回，白玉が3回，青玉が1回出る確率を求めよ。　　解答　$\dfrac{15}{128}$

各回の試行で，赤玉，白玉，青玉が出る確率は，それぞれ $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$ である。

また，6 回の試行で，赤玉が 2 回，白玉が 3 回，青玉が 1 回出る事象は $\frac{6!}{2!3!1!}$ 通りあり，これらは互いに排反である。

よって，求める確率は　$\frac{6!}{2!3!1!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{15}{128}$

11 A と B がテニスの試合を行うとき，各ゲームで A，B が勝つ確率は，それぞれ $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$ であるとする。3 ゲームを先取した方が試合の勝者になるとするとき，A が勝者になる確率を求めよ。　解答　$\frac{64}{81}$

A が勝者になる場合は，総ゲーム数により，次の [1] ～ [3] の場合に分かれる。

[1]　3 ゲームで A が勝者になる場合

A が 3 回続けて勝つから，その確率は　$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

[2]　4 ゲームで A が勝者になる場合

3 ゲームまでに A が 2 回，B が 1 回勝ち，4 ゲーム目に A が勝つから，その確率は

$${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$

[3]　5 ゲームで A が勝者になる場合

4 ゲームまでに A が 2 回，B が 2 回勝ち，5 ゲーム目に A が勝つから，その確率は

$${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$$

[1]，[2]，[3] は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}=\frac{64}{81}$$

12 赤玉 6 個，白玉 4 個が入った袋の中から，もとに戻さないで 1 個ずつ 2 回取り出すとき，最初の玉が赤である事象を A，2 番目の玉が白である事象を B とする。次の確率を求めよ。

(1)　$P_A(B)$　　(2)　$P_A(\overline{B})$　　(3)　$P_{\overline{A}}(B)$　　(4)　$P_{\overline{A}}(\overline{B})$

解答　(1)　$\frac{4}{9}$　(2)　$\frac{5}{9}$　(3)　$\frac{1}{3}$　(4)　$\frac{2}{3}$

(1)　求める確率は，最初の玉が赤であったとき，2 番目の玉が白である確率であるから

$$P_A(B)=\frac{4}{9}$$

(2)　求める確率は，最初の玉が赤であったとき，2 番目の玉が赤である確率であるから

$$P_A(\overline{B})=\frac{5}{9}$$

(3)　求める確率は，最初の玉が白であったとき，2 番目の玉が白である確率であるから

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

(4)　求める確率は，最初の玉が白であったとき，2 番目の玉が赤である確率であるから

$$P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

13 袋の中に赤玉 3 個，白玉 2 個が入っている。A がこの袋から 1 個取り出し，取り出した玉と同じ色の玉を 2 個追加して 3 個とも袋に戻す。次に，B がこの袋から 1 個取り出すとき，玉の色が赤である確率を求めよ。　解答　$\frac{3}{5}$

B が取り出す玉の色が赤であるという事象は，次の 2 つの事象の和事象である。

[1]　A が取り出した玉が赤玉で，B が赤玉を取り出す場合

この場合の確率は　$\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}$

[2]　A が取り出した玉が白玉で，B が赤玉を取り出す場合

この場合の確率は　$\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}$

[1]，[2] は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{5}$$

14 A の袋には白玉 4 個，黒玉 5 個，B の袋には白玉 3 個，黒玉 2 個が入っている。A の袋から同時に 2 個を取り出して B の袋に入れ，よく混ぜた後，B の袋から同時に 2 個を取り出して A の袋に入れる。このとき，A の袋の中の白玉，黒玉の数が初めと変わらない確率を求めよ。解答　$\frac{10}{21}$

次の 3 つの場合がある。

[1]　A から白玉 2 個，B から白玉 2 個を取り出す場合

[2]　A から白玉 1 個と黒玉 1 個，B から白玉 1 個と黒玉 1 個を取り出す場合

[3]　A から黒玉 2 個，B から黒玉 2 個を取り出す場合

それぞれの場合の確率は

[1]　$\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}\times\frac{{}_5C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{6}\times\frac{10}{21}=\frac{5}{63}$

[2]　$\frac{{}_4C_1\times{}_5C_1}{{}_9C_2}\times\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{5}{9}\times\frac{4}{7}=\frac{20}{63}$

[3]　$\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{5}{18}\times\frac{2}{7}=\frac{5}{63}$

[1]，[2]，[3] は互いに排反であるから，求める確率は　$\frac{5}{63}+\frac{20}{63}+\frac{5}{63}=\frac{10}{21}$

15 白玉 6 個，赤玉 5 個が入った袋の中から，もとに戻さないで 1 個ずつ続けて 2 回玉を取り出す。2 回目の玉が赤であるとき，1 回目の玉が赤である確率を求めよ。　解答　$\frac{2}{5}$

1 回目の玉が赤であるという事象を A，2 回目の玉が赤であるという事象を B とすると，求める確率は　$P_B(A)$

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=\frac{5}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{2}{11}$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=\frac{2}{11}+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$$

$$=\frac{2}{11}+\frac{6}{11}\times\frac{5}{10}=\frac{5}{11}$$

よって，求める確率は　$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{11}\div\frac{5}{11}=\frac{2}{5}$

16 ある品物を製造するとき，A 工場の製品には 5 %，B 工場の製品には 3 % の不合格品が含まれる。A 工場の製品 100 個と B 工場の製品 150 個を混ぜた中から取り出した 1 個の製品について，次の確率を求めよ。

(1)　A 工場の不合格品である確率　　(2)　不合格品である確率

(3)　不合格品であったとき，A 工場の製品である確率　解答 (1)　$\frac{1}{50}$　(2)　$\frac{19}{500}$　(3)　$\frac{10}{19}$

取り出した製品が，A 工場の製品であるという事象を A，B 工場の製品であるという事象を B，不合格品であるという事象を E とすると

$$P(A)=\frac{100}{250}=\frac{2}{5},\ P(B)=\frac{150}{250}=\frac{3}{5},\ P_A(E)=\frac{5}{100},\ P_B(E)=\frac{3}{100}$$

(1)　求める確率は　$P(A\cap E)=P(A)P_A(E)=\frac{2}{5}\times\frac{5}{100}=\frac{1}{50}$

(2)　求める確率は

$$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)=\frac{1}{50}+P(B)P_B(E)$$

$$=\frac{1}{50}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{100}=\frac{1}{50}+\frac{9}{500}=\frac{19}{500}$$

(3)　求めるのは，条件付き確率 $P_E(A)$ であるから

$$P_E(A)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{1}{50}\div\frac{19}{500}=\frac{10}{19}$$

17 1 枚の硬貨を投げて，表が出たときは数直線上の点 P を正の向きに 2 だけ進め，裏が出たときは P を負の向きに 1 だけ進める。硬貨を 9 回投げ終わったとき，P が最初の位置にもどっている確率を求めよ。解答　$\frac{21}{128}$

硬貨を 1 回投げるとき，表が出る確率は　$\frac{1}{2}$

9 回のうち，表が r 回出るとすると，裏は $(9-r)$ 回出るから，最初の位置にもどっているのは

$$2r+(-1)(9-r)=0$$

が成り立つときである。

これを解くと　$r=3$

よって，9 回のうち表がちょうど 3 回出るときである。

したがって，求める確率は

$${}_9C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{9-3}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{21}{128}$$

18 さいころを続けて 100 回投げるとき，1 の目がちょうど k 回 $(0\leqq k\leqq100)$ 出る確率は ${}_{100}C_k\times\frac{\text{ア}\boxed{}}{6^{100}}$ であり，この確率が最大になるのは $k=$ イ $\boxed{}$ のときである。

解答　(ア)　5^{100-k}　　(イ)　16

さいころを 100 回投げるとき，1 の目がちょうど k 回出る確率を p_k とすると

$$p_k={}_{100}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}={}_{100}C_k\times\frac{{}^{\text{ア}}5^{100-k}}{6^{100}}$$

ここで　$p_k={}_{100}C_k\times\frac{5^{100-k}}{6^{100}}=\frac{100!}{k!(100-k)!}\times\frac{5^{100-k}}{6^{100}}$　より

$$p_{k+1}=\frac{100!}{(k+1)!\{100-(k+1)\}!}\times\frac{5^{100-(k+1)}}{6^{100}}=\frac{100!}{(k+1)!(99-k)!}\times\frac{5^{99-k}}{6^{100}}$$ であるから

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{100!\cdot5^{99-k}}{(k+1)!(99-k)!}\times\frac{k!(100-k)!}{100!\cdot5^{100-k}}=\frac{100-k}{5(k+1)}$$ となる。

$\frac{p_{k+1}}{p_k}<1$ とすると　$\frac{100-k}{5(k+1)}<1$

両辺に $5(k+1)\,[>0]$ を掛けて　$100-k<5(k+1)$

これを解くと　$k>\frac{95}{6}=15.8\cdots$

よって，$k\geqq16$ のとき　$p_k>p_{k+1}$

$\frac{p_{k+1}}{p_k}>1$ とすると　$100-k>5(k+1)$

これを解くと　$k<\frac{95}{6}=15.8\cdots$

よって，$0\leqq k\leqq15$ のとき　$p_k<p_{k+1}$

したがって　$p_0<p_1<\cdots\cdots<p_{15}<p_{16}$，　$p_{16}>p_{17}>\cdots\cdots>p_{100}$

よって，p_k が最大になるのは $k={}^{\text{イ}}16$ のときである。

数学演習（確率）R２．１２．５　分子・分母を計算してしまってから、約分している者が多い → 時間のムダ　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1　男子４人と女子３人がくじ引きで１列に並ぶとき，次の確率を求めよ。

(1)　男子と女子が交互に並ぶ確率

(2)　両端のうち，少なくとも一方に女子が並ぶ確率　**解答**　(1)　$\frac{1}{35}$　(2)　$\frac{5}{7}$

(1)　７人を１列に並べる順列は 7! 通りある。

男子と女子が交互に並ぶのは 男女男女男女男 の場合で，このような並び方は $4!\times3!$ 通りある。

よって，求める確率は　$\frac{4!\times3!}{7!}=\frac{1}{35}$

$\frac{2}{35}$ になる者が多い（男女…，女男…）　←こっちにはならない

(2)　両端に男子が並ぶ確率は　$\frac{{}_4P_2\times5!}{7!}=\frac{2}{7}$

少なくとも一方に女子が並ぶ事象は，両端に男子が並ぶ事象の余事象であるから，

求める確率は　$1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$　← 1から引くのを忘れている者多し

$*\frac{{}_4C_2 \cdot 5!}{7!}$ 多し

2　A，B，C の３人がじゃんけんを１回するとき，次の確率を求めよ。

(1)　A だけが勝つ確率　　(2)　全員が違う手を出す確率

(3)　誰も勝たない，すなわちあいこになる確率　**解答**　(1)　$\frac{1}{9}$　(2)　$\frac{2}{9}$　(3)　$\frac{1}{3}$

３人の手の出し方は　$3\times3\times3=27$（通り）

(1)　A だけが勝つ手の出し方は３通り。

よって，求める確率は　$\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times3$　← これは，じゃんけんを３回している。

(2)　全員が違う手の出し方は　$3!=6$（通り）

よって，求める確率は　$\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

(3)　あいこになるのは，全員が違う手か，全員が同じ手を出す場合で

$6+3=9$（通り）

よって，求める確率は　$\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

3　A，B，C，D，E，F，G，H の８文字を無作為に横１列に並べるとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　A と B が両端にある。　　(2)　A は B より左で，B は C より左にある。

解答　(1)　$\frac{1}{28}$　(2)　$\frac{1}{6}$

８文字を横１列に並べる方法は　8! 通り

(1)　両端の A，B の並べ方は　２通り

残り６文字の並べ方は　6! 通り

よって，求める確率は　$\frac{2\times6!}{8!}=\frac{2}{8\cdot7}=\frac{1}{28}$

(2)　A，B，C を同じ文字 □ と考え，□３個と残りの５文字を１列に並べる順列を作り，□ に左から A，B，C を順に入れると，A は B より左で，B は C より左にある並べ方になる。

よって，この場合の数は　$\frac{8!}{3!}$ 通り

ゆえに，求める確率は　$\frac{8!}{3!}\div8!=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$

4　１から 100 までの 100 枚の番号札から１枚引く。

(1)　番号が３の倍数または５の倍数である確率を求めよ。

(2)　番号が３の倍数でも５の倍数でもない確率を求めよ。　**解答**　(1)　$\frac{47}{100}$　(2)　$\frac{53}{100}$

番号が３の倍数であるという事象を A，５の倍数であるという事象を B とすると

$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot33\}$

$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$

$A\cap B=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot6\}$

(1)　求める確率は　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{33}{100}+\frac{20}{100}-\frac{6}{100}=\frac{47}{100}$

(2)　求める確率は　$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$=1-\frac{47}{100}=\frac{53}{100}$

5　赤玉５個，白玉４個，黄玉３個の入った袋から同時に３個の玉を取り出すとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　黄玉が２個以上出る。　　(2)　３個とも同じ色の玉が出る。

解答　(1)　$\frac{7}{55}$　(2)　$\frac{3}{44}$

全部の 12 個から３個取る組合せは　${}_{12}C_3$ 通り

$\frac{{}_3C_2}{{}_{12}C_3}$ というミス多し

(1)　「黄玉が２個以上出る」という事象は

「黄玉が２個出る」という事象 A，「黄玉が３個出る」という事象 B

の和事象 $A\cup B$ である。

$P(A)=\frac{{}_3C_2\times{}_9C_1}{{}_{12}C_3}=\frac{27}{220}$，　$P(B)=\frac{{}_3C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{1}{220}$

であり，A，B は互いに排反であるから

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{27}{220}+\frac{1}{220}=\frac{7}{55}$

(2)　「３個とも同じ色の玉が出る」という事象は，

「３個とも赤玉が出る」という事象 A，「３個とも白玉が出る」という事象 B，

「３個とも黄玉が出る」という事象 C

の和事象 $A\cup B\cup C$ である。

A，B，C は互いに排反であるから

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{{}_5C_3}{{}_{12}C_3}+\frac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3}+\frac{{}_3C_3}{{}_{12}C_3}$

$=\frac{10}{220}+\frac{4}{220}+\frac{1}{220}=\frac{3}{44}$

6　１個のさいころを４回投げるとき，出る目の最大値が３である確率

$\left(\frac{3}{6}\right)^4$ という答えが多い

解答　$\frac{65}{1296}$

出る目の最大値が３であるという事象は，出る目がすべて３以下であるという事象から，出る目がすべて２以下であるという事象を除いたものと考えられる。

さいころを１回投げるとき，出る目が３以下である確率は $\frac{3}{6}$，２以下である確率は $\frac{2}{6}$

であるから，求める確率は　$\left(\frac{3}{6}\right)^4-\left(\frac{2}{6}\right)^4=\frac{3^4-2^4}{6^4}=\frac{65}{1296}$

7　A，B，C の３人が，ある検定試験に合格する確率がそれぞれ $\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{8}$ であるとする。次の場合の確率を求めよ。

(1)　少なくとも１人が合格する。　　(2)　２人だけが合格する。

解答　(1)　$\frac{61}{64}$　(2)　$\frac{29}{64}$

(1)　「少なくとも１人が合格する」という事象は，「３人とも不合格である」という事象の余事象である。

３人とも不合格である確率は　　３つ分母を掛けていない

$\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{5}{8}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{64}$

よって，求める確率は　$1-\frac{3}{64}=\frac{61}{64}$

(2)　３人のうち，２人だけが合格するのは，次の [1]～[3] のいずれかの場合である。

[1]　A，B が合格，C が不合格の場合

その確率は　$\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{5}{8}\right)=\frac{9}{64}$

[2]　A，C が合格，B が不合格の場合

その確率は　$\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{8}=\frac{15}{64}$

[3]　B，C が合格，A が不合格の場合

その確率は　$\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{64}$

[1]～[3] は互いに排反であるから，求める確率は　$\frac{9}{64}+\frac{15}{64}+\frac{5}{64}=\frac{29}{64}$

8　１個のさいころを５回投げるとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　奇数の目がちょうど２回出る。　　(2)　５以上の目がちょうど４回出る。

解答　(1)　$\frac{5}{16}$　(2)　$\frac{10}{243}$

(1)　さいころを１回投げるとき，奇数の目が出る確率は　$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

よって，求める確率は

${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-2}=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

(2)　さいころを１回投げるとき，５以上の目が出る確率は　$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

よって，求める確率は

${}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-4}=5\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{2}{3}=\frac{10}{243}$

9　あるテストで，○ か × かを答える問題が８問出題された。でたらめに ○ × を答えるとき，７問以上を正解する確率を求めよ。　**解答**　$\frac{9}{256}$

７問以上を正解するのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1]　ちょうど７問を正解する場合

その確率は　${}_8C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(1-\frac{1}{2}\right)^{8-7}=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^7\times\frac{1}{2}=\frac{8}{256}$

[2]　８問すべてを正解する場合

その確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$

[1]，[2] は互いに排反であるから，求める確率は

$\frac{8}{256}+\frac{1}{256}=\frac{9}{256}$

10　赤玉２個と白玉４個と青玉２個が入った袋から１個の玉を取り出し，色を調べてからもとに戻すことを６回行う。このとき，赤玉が２回，白玉が３回，青玉が１回出る確率を求めよ。　**解答**　$\frac{15}{128}$

各回の試行で，赤玉，白玉，青玉が出る確率は，それぞれ $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$ である。

また，6 回の試行で，赤玉が 2 回，白玉が 3 回，青玉が 1 回出る事象は $\frac{6!}{2!3!1!}$ 通りあり，これらは互いに排反である。

$_6C_2\times{}_4C_3\times{}_1C_1$ でもo.k.

よって，求める確率は　　$\frac{6!}{2!3!1!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{15}{128}$

こ4が出てこない者多し

11 A と B がテニスの試合を行うとき，各ゲームで A，B が勝つ確率は，それぞれ $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$ であるとする。3 ゲームを先取した方が試合の勝者になるとするとき，A が勝者になる確率を求めよ。　**解答**　$\frac{64}{81}$

A が勝者になる場合は，総ゲーム数により，次の [1]～[3] の場合に分かれる。

場合分けしていない

[1]　3 ゲームで A が勝者になる場合

A が 3 回続けて勝つから，その確率は　　$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

[2]　4 ゲームで A が勝者になる場合

3 ゲームまでに A が 2 回，B が 1 回勝ち，4 ゲーム目に A が勝つから，その確率は

$${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$

$_4C_3$ になるミス

[3]　5 ゲームで A が勝者になる場合

4 ゲームまでに A が 2 回，B が 2 回勝ち，5 ゲーム目に A が勝つから，その確率は

$${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$$

$_5C_3$ になるミス

[1]，[2]，[3] は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}=\frac{64}{81}$$

12 赤玉 6 個，白玉 4 個が入った袋の中から，もとに戻さないで 1 個ずつ 2 回取り出すとき，最初の玉が赤である事象を A，2 番目の玉が白である事象を B とする。次の確率を求めよ。

(1)　$P_A(B)$　　(2)　$P_A(\overline{B})$　　(3)　$P_{\overline{A}}(B)$　　(4)　$P_{\overline{A}}(\overline{B})$

解答　(1)　$\frac{4}{9}$　　(2)　$\frac{5}{9}$　　(3)　$\frac{1}{3}$　　(4)　$\frac{2}{3}$

(1)　求める確率は，最初の玉が赤であったとき，2 番目の玉が白である確率であるから

$$P_A(B)=\frac{4}{9}$$

$P(A\cap B)$ を答えている

(2)　求める確率は，最初の玉が赤であったとき，2 番目の玉が赤である確率であるから

$$P_A(\overline{B})=\frac{5}{9}$$

(3)　求める確率は，最初の玉が白であったとき，2 番目の玉が白である確率であるから

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

(4)　求める確率は，最初の玉が白であったとき，2 番目の玉が赤である確率であるから

$$P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

13 袋の中に赤玉 3 個，白玉 2 個が入っている。A がこの袋から 1 個取り出し，取り出した玉と同じ色の玉を 2 個追加して 3 個とも袋に戻す。次に，B がこの袋から 1 個取り出すとき，玉の色が赤である確率を求めよ。　**解答**　$\frac{3}{5}$

B が取り出す玉の色が赤であるという事象は，次の 2 つの事象の和事象である。

[1]　A が取り出した玉が赤玉で，B が赤玉を取り出す場合

この場合の確率は　　$\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}$

[2]　A が取り出した玉が白玉で，B が赤玉を取り出す場合

この場合の確率は　　$\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}$

$\frac{3}{5}\times\frac{6}{8}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{8}$

というミス多し

[1]，[2] は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{5}$$

14 A の袋には白玉 4 個，黒玉 5 個，B の袋には白玉 3 個，黒玉 2 個が入っている。A の袋から同時に 2 個を取り出して B の袋に入れ，よく混ぜた後，B の袋から同時に 2 個を取り出して A の袋に入れる。このとき，A の袋の中の白玉，黒玉の数が初めと変わらない確率を求めよ。　**解答**　$\frac{10}{21}$

次の 3 つの場合がある。

[1]　A から白玉 2 個，B から白玉 2 個を取り出す場合

[2]　A から白玉 1 個と黒玉 1 個，B から白玉 1 個と黒玉 1 個を取り出す場合

[3]　A から黒玉 2 個，B から黒玉 2 個を取り出す場合

それぞれの場合の確率は

[1]　$\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}\times\frac{{}_5C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{6}\times\frac{10}{21}=\frac{5}{63}$

$\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}$

としている者がいる

[2]　$\frac{{}_4C_1\times{}_5C_1}{{}_9C_2}\times\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{5}{9}\times\frac{4}{7}=\frac{20}{63}$

[3]　$\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{5}{18}\times\frac{2}{7}=\frac{5}{63}$

[1]，[2]，[3] は互いに排反であるから，求める確率は　　$\frac{5}{63}+\frac{20}{63}+\frac{5}{63}=\frac{10}{21}$

15 白玉 6 個，赤玉 5 個が入った袋の中から，もとに戻さないで 1 個ずつ続けて 2 回玉を取り出す。2 回目の玉が赤であるとき，1 回目の玉が赤である確率を求めよ。　**解答**　$\frac{2}{5}$

1 回目の玉が赤であるという事象を A，2 回目の玉が赤であるという事象を B とすると，求める確率は　　$P_B(A)$

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=\frac{5}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{2}{11}$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=\frac{2}{11}+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$$

$$=\frac{2}{11}+\frac{6}{11}\times\frac{5}{10}=\frac{5}{11}$$

← これを答えとしている

よって，求める確率は　　$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{11}\div\frac{5}{11}=\frac{2}{5}$

16 ある品物を製造するとき，A 工場の製品には 5 %，B 工場の製品には 3 % の不合格品が含まれる。A 工場の製品 100 個と B 工場の製品 150 個を混ぜた中から取り出した 1 個の製品について，次の確率を求めよ。

(1)　A 工場の不合格品である確率　　(2)　不合格品である確率

(3)　不合格品であったとき，A 工場の製品である確率　**解答**　(1)　$\frac{1}{50}$　(2)　$\frac{19}{500}$　(3)　$\frac{10}{19}$

取り出した製品が，A 工場の製品であるという事象を A，B 工場の製品であるという事象を B，不合格品であるという事象を E とすると

$$P(A)=\frac{100}{250}=\frac{2}{5},\quad P(B)=\frac{150}{250}=\frac{3}{5},\quad P_A(E)=\frac{5}{100},\quad P_B(E)=\frac{3}{100}$$

(1)　求める確率は　　$P(A\cap E)=P(A)P_A(E)=\frac{2}{5}\times\frac{5}{100}=\frac{1}{50}$

(2)　求める確率は

$$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)=\frac{1}{50}+P(B)P_B(E)$$

$$=\frac{1}{50}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{100}=\frac{1}{50}+\frac{9}{500}=\frac{19}{500}$$

(3)　求めるのは，条件付き確率 $P_E(A)$ であるから

$$P_E(A)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{1}{50}\div\frac{19}{500}=\frac{10}{19}$$

17 1 枚の硬貨を投げて，表が出たときは数直線上の点 P を正の向きに 2 だけ進め，裏が出たときは P を負の向きに 1 だけ進める。硬貨を 9 回投げ終わったとき，P が最初の位置にもどっている確率を求めよ。　**解答**　$\frac{21}{128}$

硬貨を 1 回投げるとき，表が出る確率は　$\frac{1}{2}$

9 回のうち，表が r 回出るとすると，裏は $(9-r)$ 回出るから，最初の位置にもどっているのは

$$2r+(-1)(9-r)=0$$

が成り立つときである。

これを解くと　　$r=3$

よって，9 回のうち表がちょうど 3 回出るときである。

したがって，求める確率は

$${}_9C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{9-3}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{21}{128}$$

18 さいころを続けて 100 回投げるとき，1 の目がちょうど k 回 $(0\leqq k\leqq 100)$ 出る確率は ${}_{100}C_k\times\frac{\boxed{ア}}{6^{100}}$ であり，この確率が最大になるのは $k=\boxed{イ}$ のときである。

解答　(ア)　5^{100-k}　　(イ)　16

さいころを 100 回投げるとき，1 の目がちょうど k 回出る確率を p_k とすると

$$p_k={}_{100}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}={}_{100}C_k\times\frac{{}^{ア}5^{100-k}}{6^{100}}$$

ここで　$p_k={}_{100}C_k\times\frac{5^{100-k}}{6^{100}}=\frac{100!}{k!(100-k)!}\times\frac{5^{100-k}}{6^{100}}$　より

$$p_{k+1}=\frac{100!}{(k+1)!\{100-(k+1)\}!}\times\frac{5^{100-(k+1)}}{6^{100}}=\frac{100!}{(k+1)!(99-k)!}\times\frac{5^{99-k}}{6^{100}}\quad であるから$$

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{100!\cdot5^{99-k}}{(k+1)!(99-k)!}\times\frac{k!(100-k)!}{100!\cdot5^{100-k}}=\frac{100-k}{5(k+1)}\quad となる。$$

$\frac{p_{k+1}}{p_k}<1$ とすると　　$\frac{100-k}{5(k+1)}<1$

両辺に $5(k+1)\,[>0]$ を掛けて　　$100-k<5(k+1)$

これを解くと　　$k>\frac{95}{6}=15.8\cdots$

よって，$k\geqq16$ のとき　　$p_k>p_{k+1}$

$\frac{p_{k+1}}{p_k}>1$ とすると　　$100-k>5(k+1)$

これを解くと　　$k<\frac{95}{6}=15.8\cdots$

よって，$0\leqq k\leqq15$ のとき　　$p_k<p_{k+1}$

したがって　　$p_0<p_1<\cdots\cdots<p_{15}<p_{16}$，　$p_{16}>p_{17}>\cdots\cdots>p_{100}$

よって，p_k が最大になるのは $k={}^{イ}16$ のときである。