数学演習（場合の数）Ｒ２．１１．２４　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 全体集合 U とその部分集合 A，B について，$n(U)=50$，$n(A)=23$，$n(B)=35$ が成り立つとき，$n(A\cap B)$ のとりうる値の最大値，最小値を求めよ。

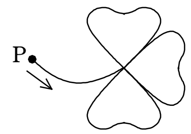
$\boxed{2}$ 150 以下の自然数のうち，3，4，5 の少なくとも 1 つで割り切れる数は何個あるか。

$\boxed{3}$ 次の硬貨の一部または全部でちょうど支払うことのできる金額は何通りあるか。

(1)　10 円硬貨 2 枚，50 円硬貨 1 枚，100 円硬貨 6 枚

(2)　10 円硬貨 3 枚，50 円硬貨 3 枚，100 円硬貨 3 枚

$\boxed{4}$ 右の図を，点 P を出発点として一筆書きする方法は何通りあるか。



$\boxed{5}$ C，L，E，A，R の 5 文字を全部使ってできる順列を，ACELR を 1 番目として，辞書式に並べるとき，次の問いに答えよ。

(1)　81 番目の文字列を求めよ。　　(2)　ELARC は何番目の文字列か。

$\boxed{6}$ 男子 3 人，女子 4 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。

(1)　両端が男子である。　　(2)　女子 4 人が続いて並ぶ。

(3)　男子，女子が交互に並ぶ。

$\boxed{7}$ 大人 2 人と子ども 4 人が，円形の 6 人席のテーブルに着席するとき，次のような並び方は何通りあるか。

(1)　大人 2 人が向かい合う。

(2)　大人 2 人の間に子どもがちょうど 1 人入る。

$\boxed{8}$ 色の異なる 8 個の玉をすべて用いて作る首飾りは何種類あるか。

$\boxed{9}$ 立方体の各面に，隣り合った面の色は異なるように，色を塗りたい。ただし，立方体を回転させて一致する塗り方は同じとみなす。

(1)　異なる 6 色をすべて使って塗る方法は何通りあるか。

(2)　異なる 5 色をすべて使って塗る方法は何通りあるか。

$\boxed{10}$ 正四角錐の5つの面を，赤青黄緑紫の5色すべてを使って塗り分ける方法は何通りあるか。

$\boxed{11}$ (1) 6人がA，Bの2部屋に入る方法は，何通りあるか。ただし，全員が1つの部屋に入ってもよい。

(2) 6人が2つの組に分かれる方法は何通りあるか。

$\boxed{12}$ 男子8人，女子4人の中から5人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか。

(1) すべての選び方

(2) 男子3人，女子2人を選ぶ。

(3) 女子が少なくとも1人選ばれる。

(4) 特定の2人A，Bがともに選ばれる。

(5) Aは選ばれるが，Bは選ばれない。

$\boxed{13}$ 4桁の自然数 n の千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ a，b，c，d とする。次の条件を満たす n は何個あるか。

(1) $a>b>c>d$

(2) $a<b<c<d$

$\boxed{14}$ 異なる色の9個の玉を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1) 4個，3個，2個の3つの組に分ける。

(2) A，B，Cの3つの組に3個ずつ分ける。

(3) 3個ずつの3つの組に分ける。

(4) 2個，2個，2個，3個の4つの組に分ける。

$\boxed{15}$ 0000から9999までの番号のうちで，0101，0033のように，同じ数字を2個ずつ含むものは何個あるか。

$\boxed{16}$ YOKOHAMAの8文字すべてを1列に並べる。

(1) Y，K，H，Mがこの順にある並べ方は何通りあるか。

(2) OとAが必ず偶数番目にある並べ方は何通りあるか。

$\boxed{17}$ $x+y+z=12$ と次の条件を満たす x，y，z の組は，全部で何個あるか。

(1) x，y，z は負でない整数

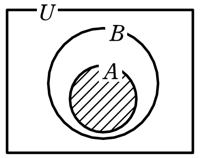
(2) x，y，z は自然数

$\boxed{18}$ 1個のさいころを3回投げて出る目の数を順に a，b，c とする。$a \leqq b \leqq c$ となる場合は何通りあるか。

$\boxed{1}$ 全体集合 U とその部分集合 A，B について，$n(U)=50$，$n(A)=23$，$n(B)=35$ が成り立つとき，$n(A\cap B)$ のとりうる値の最大値，最小値を求めよ。

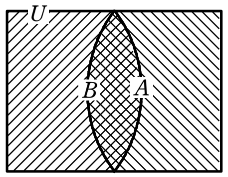
解答　最大値 23，最小値 8

$n(A\cap B)$ が最大値をとるのは $A\subset B$ のときである。
このとき，$A\cap B=A$ であり
$$n(A\cap B)=n(A)=23$$



$A\subset B$

また，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ から
$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$
$$=58-n(A\cup B)$$
よって，$n(A\cap B)$ が最小値をとるのは，$n(A\cup B)$ が最大となるとき，すなわち $A\cup B=U$ のときである。
このとき
$$n(A\cap B)=58-n(U)=58-50=8$$
よって　　最大値 23，最小値 8



$A\cup B=U$

$\boxed{2}$ 150 以下の自然数のうち，3，4，5 の少なくとも 1 つで割り切れる数は何個あるか。

解答　90 個

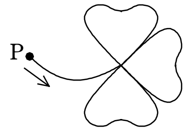
150 以下の自然数のうち，3 の倍数，4 の倍数，5 の倍数全体の集合を，それぞれ A，B，C とすると　　$n(A)=50$，$n(B)=37$，$n(C)=30$
また，$A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$，$A\cap B\cap C$ は，それぞれ 12 の倍数，20 の倍数，15 の倍数，60 の倍数全体の集合であるから
$$n(A\cap B)=12,\ n(B\cap C)=7,\ n(C\cap A)=10$$
$$n(A\cap B\cap C)=2$$
3，4，5 の少なくとも 1 つで割り切れる数全体の集合は $A\cup B\cup C$ であるから
$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$
$$=50+37+30-12-7-10+2=90\ (個)$$

$\boxed{3}$ 次の硬貨の一部または全部でちょうど支払うことのできる金額は何通りあるか。
(1)　10 円硬貨 2 枚，50 円硬貨 1 枚，100 円硬貨 6 枚
(2)　10 円硬貨 3 枚，50 円硬貨 3 枚，100 円硬貨 3 枚

解答　(1)　41 通り　　(2)　39 通り

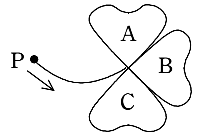
(1)　異なる硬貨を用いて，同じ金額を表せない。
　10 円硬貨の使い方は 0 枚～2 枚の　　3 通り
　50 円硬貨の使い方は 0 枚～1 枚の　　2 通り
　100 円硬貨の使い方は 0 枚～6 枚の　　7 通り
　ただし，全部 0 枚の場合は支払うことができない。
　よって，支払うことのできる金額は　　$3\times2\times7-1=41$ (通り)
(2)　50 円硬貨 2 枚と 100 円硬貨 1 枚は同じ金額を表す。
　100 円硬貨 3 枚は 50 円硬貨 6 枚と考えると，硬貨は 10 円硬貨 3 枚，50 円硬貨 9 枚となる。
　10 円硬貨の使い方は 0 枚～3 枚の　　4 通り
　50 円硬貨の使い方は 0 枚～9 枚の　　10 通り
　ただし，全部 0 枚の場合は支払うことができない。
　よって，支払うことのできる金額は　　$4\times10-1=39$ (通り)

$\boxed{4}$ 右の図を，点 P を出発点として一筆書きする方法は何通りあるか。



解答　48 通り

3 枚の葉っぱを，右の図のようにそれぞれ A，B，C とする。
1 番目に書く葉っぱは，A，B，C のどれかで　　3 通り
そのどの場合に対しても，2 番目に書く葉っぱは，1 番目に書いた葉っぱ以外の 2 通りであり，3 番目に書く葉っぱは 1 通りに決まる。
よって，葉っぱ A，B，C を書く順序は　　$3\times2\times1=6$ (通り)
また，それぞれの葉っぱを右回りで書くか，左回りで書くかで
$$2\times2\times2=8\ (通り)$$
よって，図を一筆書きする方法は　　$6\times8=48$ (通り)
別解　$6\times4\times2=48$ 通り



$\boxed{5}$ C，L，E，A，R の 5 文字を全部使ってできる順列を，ACELR を 1 番目として，辞書式に並べるとき，次の問いに答えよ。
(1)　81 番目の文字列を求めよ。　　　　(2)　ELARC は何番目の文字列か。

解答　(1)　LCEAR　　(2)　62 番目

(1)　A○○○○，C○○○○，E○○○○ の形の文字列は，それぞれ 4! 個ある。
　LA○○○ の形の文字列は 3! 個ある。
　ここまでの文字列の個数は　　$4!\times3+3!=72+6=78$ (個)
　よって，81 番目の文字列は LC○○○ の形の 3 番目の文字列である。
　LC○○○ の形の文字列は LCAER，LCARE，LCEAR，…… と並ぶから，81 番目の文字列は　　LCEAR
(2)　A○○○○，C○○○○ の形の文字列は全部で $4!\times2$ 個ある。
　EA○○○，EC○○○ の形の文字列は全部で $3!\times2$ 個ある。
　ここまでの文字列の個数は
$$4!\times2+3!\times2=48+12=60\ (個)$$
　ELARC は，EL○○○ の形の 2 番目の文字列であるから
$$60+2=62\ (番目)$$

$\boxed{6}$ 男子 3 人，女子 4 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。
(1)　両端が男子である。　　　　(2)　女子 4 人が続いて並ぶ。
(3)　男子，女子が交互に並ぶ。

解答　(1)　720 通り　　(2)　576 通り　　(3)　144 通り

(1)　両端の男子 2 人の並び方は　　${}_3\mathrm{P}_2$ 通り
　そのどの場合に対しても，間に並ぶ残り 5 人の並び方は　　5! 通り
　よって，並び方の総数は，積の法則により
$${}_3\mathrm{P}_2\times5!=3\cdot2\times5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720\ (通り)$$
(2)　女子 4 人をひとまとめにする。
　男子 3 人とひとまとめにした女子の並び方は　　4! 通り
　そのどの場合に対しても，ひとまとめにした女子 4 人の並び方は　　4! 通り
　よって，並び方の総数は，積の法則により
$$4!\times4!=4\cdot3\cdot2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1=576\ (通り)$$
(3)　女男女男女男女と並ぶ場合である。
　女子 4 人の並び方は　　4! 通り
　男子 3 人の並び方は　　3! 通り
　よって，並び方の総数は，積の法則により
$$4!\times3!=4\cdot3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1=144\ (通り)$$

$\boxed{7}$ 大人 2 人と子ども 4 人が，円形の 6 人席のテーブルに着席するとき，次のような並び方は何通りあるか。
(1)　大人 2 人が向かい合う。
(2)　大人 2 人の間に子どもがちょうど 1 人入る。

解答　(1)　24 通り　　(2)　48 通り

(1)　大人 1 人の位置を固定して考えると，もう 1 人の大人の位置はその向かい合う席に決まる。
　残りの席に子ども 4 人が座ればよいから，求める並び方は
$$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24\ (通り)$$
(2)　大人 1 人の位置を固定して考えると，もう 1 人の大人の位置は 2 通りある。
　残りの席に子ども 4 人が座ればよいから，求める並び方は
$$2\times4!=2\times4\cdot3\cdot2\cdot1=48\ (通り)$$

$\boxed{8}$ 色の異なる 8 個の玉をすべて用いて作る首飾りは何種類あるか。

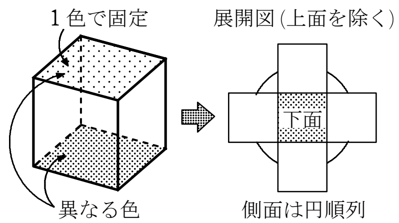
解答　2520 種類

8 個の玉の円順列を作ると，裏返して同じになるものが 2 つずつできる。
よって　　$(8-1)!\div2=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\div2$
$$=2520\ (種類)$$

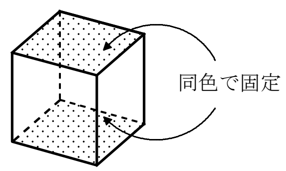
$\boxed{9}$ 立方体の各面に，隣り合った面の色は異なるように，色を塗りたい。ただし，立方体を回転させて一致する塗り方は同じとみなす。
(1)　異なる 6 色をすべて使って塗る方法は何通りあるか。
(2)　異なる 5 色をすべて使って塗る方法は何通りあるか。

解答　(1)　30 通り　　(2)　15 通り

(1)　ある面を 1 つの色で塗り，それを上面に固定する。
　このとき，下面の色は残りの色で塗るから　　5 通り
　そのおのおのについて，側面の塗り方は，異なる 4 個の円順列で
$$(4-1)!=3!=6\ (通り)$$
　よって　　$5\times6=30$ (通り)



(2)　2 面を塗る色の選び方は 5 通り。
　その色で上面と下面を塗ると，そのおのおのについて，側面の塗り方には，上下を裏返すと塗り方が一致する場合が含まれている。
　ゆえに，異なる 4 個のじゅず順列で
$$\frac{(4-1)!}{2}=\frac{3!}{2}=3\ (通り)$$
　よって　　$5\times3=15$ (通り)



10 正四角錐の5つの面を，赤青黄緑紫の5色すべてを使って塗り分ける方法は何通りあるか。

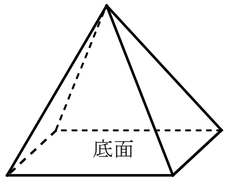
解答　30通り

底面の色の塗り方は　5通り

側面の色の塗り方は，残り4色の円順列であるから

$(4-1)!$ 通り

よって　$5\times(4-1)!=30$（通り）



11 (1) 6人がA，Bの2部屋に入る方法は，何通りあるか。ただし，全員が1つの部屋に入ってもよい。

(2) 6人が2つの組に分かれる方法は何通りあるか。

解答　(1) 64通り　(2) 31通り

(1) 6人それぞれについて，Aに入るかBに入るかの2通りあるから

$2^6=64$（通り）

(2) (1)の分け方のうち，Aに全員入る方法とBに全員入る方法を除くと

$64-2=62$（通り）

この分け方で，A，Bの区別をなくせばよいから

$\dfrac{62}{2!}=31$（通り）

12 男子8人，女子4人の中から5人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか。

(1) すべての選び方　(2) 男子3人，女子2人を選ぶ。

(3) 女子が少なくとも1人選ばれる。　(4) 特定の2人A，Bがともに選ばれる。

(5) Aは選ばれるが，Bは選ばれない。

解答　(1) 792通り　(2) 336通り　(3) 736通り　(4) 120通り　(5) 210通り

(1) 男女合わせた12人から5人を選ぶから

$_{12}C_5=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=792$（通り）

(2) 男子3人の選び方は　$_8C_3$ 通り

女子2人の選び方は　$_4C_2$ 通り

よって，求める選び方の総数は

$_8C_3\times{}_4C_2=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=336$（通り）

(3) 女子が1人も選ばれず，5人とも男子となる選び方は　$_8C_5$ 通り

(1)から，求める選び方の総数は

$792-{}_8C_5=792-{}_8C_3=792-\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=736$（通り）

(4) A，Bを先に選んでおき，残りの10人から3人を選ぶと考えて

$_{10}C_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$（通り）

(5) Aを先に選んでおき，AとBを除いた残りの10人から4人を選ぶと考えて

$_{10}C_4=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$（通り）

13 4桁の自然数 n の千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ a，b，c，d とする。次の条件を満たす n は何個あるか。

(1) $a>b>c>d$　(2) $a<b<c<d$

解答　(1) 210個　(2) 126個

(1) 0～9の10個の数字から異なる4個を選んで，大きいものから順に a，b，c，d とすると，条件を満たす自然数 n ができる。

よって，求める自然数 n の個数は　$_{10}C_4=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$（個）

(2) a は千の位の数字であるから　$a\neq0$

よって，1～9の9個の数字から異なる4個を選んで，小さいものから順に a，b，c，d とすると，条件を満たす自然数 n ができる。

したがって，求める自然数 n の個数は　$_9C_4=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$（個）

14 異なる色の9個の玉を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1) 4個，3個，2個の3つの組に分ける。

(2) A，B，Cの3つの組に3個ずつ分ける。

(3) 3個ずつの3つの組に分ける。

(4) 2個，2個，2個，3個の4つの組に分ける。

解答　(1) 1260通り　(2) 1680通り　(3) 280通り　(4) 1260通り

(1) 9個の玉から4個を選ぶ方法は　$_9C_4$ 通り

残り5個の玉から3個を選ぶ方法は　$_5C_3$ 通り

4個，3個の組が決まれば，2個の組は決まる。

よって，分け方の総数は

$_9C_4\times{}_5C_3=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=1260$（通り）

参考　2個，3個，4個の組を順に選ぶと考えて $_9C_2\times{}_7C_3$ を計算してもよい。

(2) Aの3個の選び方は　$_9C_3$ 通り

Bの3個の選び方は，残りの6個から選ぶので　$_6C_3$ 通り

A，Bの玉が決まれば，残りのCの3個は決まる。

よって，分け方の総数は

$_9C_3\times{}_6C_3=\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=1680$（通り）

(3) (2)で，同じ個数の組のA，B，Cの区別をなくすと，3! 通りずつ同じ組分けができる。よって，分け方の総数は

$\dfrac{1680}{3!}=\dfrac{1680}{6}=280$（通り）

(4) 9個の玉を2個，2個，2個，3個の4つの組A，B，C，Dに分けるとき，分け方は，(2)と同様に考えて　$_9C_2\times{}_7C_2\times{}_5C_2$ 通り

この分け方で，A，B，Cの区別をなくせばよい。

よって，分け方の総数は

$\dfrac{_9C_2\times{}_7C_2\times{}_5C_2}{3!}=\dfrac{9\cdot8}{2\cdot1}\times\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}\times\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}\times\dfrac{1}{6}=1260$（通り）

15 0000から9999までの番号のうちで，0101，0033のように，同じ数字を2個ずつ含むものは何個あるか。

解答　270個

0から9までの10個の数字から2個を選ぶ組合せは $_{10}C_2$ 通りある。

同じ数字を2個ずつ含む4個の数字を1列に並べる順列は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通りある。

よって，条件を満たす番号の総数は

$_{10}C_2\times\dfrac{4!}{2!2!}=\dfrac{10\cdot9}{2\cdot1}\times\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=270$（個）

16 YOKOHAMAの8文字すべてを1列に並べる。

(1) Y，K，H，Mがこの順にある並べ方は何通りあるか。

(2) OとAが必ず偶数番目にある並べ方は何通りあるか。

解答　(1) 420通り　(2) 144通り

(1) Y，K，H，Mを同じ文字□と考え，□4個，O2個，A2個を1列に並べる順列を作り，□に左からY，K，H，Mを順に入れると，Y，K，H，Mがこの順にある並べ方になる。

したがって　$\dfrac{8!}{4!2!2!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\times2\cdot1\times2\cdot1}=420$（通り）

(2) 偶数番目の4か所にはO，O，A，Aが入るから，その並べ方は

$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

奇数番目の4か所にはY，K，H，Mが入るから，その並べ方は　4! 通り

したがって　$\dfrac{4!}{2!2!}\times4!=144$（通り）

17 $x+y+z=12$ と次の条件を満たす x，y，z の組は，全部で何個あるか。

(1) x，y，z は負でない整数　(2) x，y，z は自然数

解答　(1) 91個　(2) 55個

(1) 求める組の個数は，異なる3個の文字 x，y，z から重複を許して12個取る組合せの総数と等しいから　$_{3+12-1}C_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=\dfrac{14\cdot13}{2\cdot1}=91$（個）

別解　等式を満たす x，y，z の組は，12個の○と2個の仕切り | の順列を作り，仕切りで分けられた3か所の○の個数を，左から順に x，y，z とすると得られる。

よって，求める組の個数は，12個の○と2個の | を1列に並べる順列の総数に等しいから　$\dfrac{14!}{12!2!}=\dfrac{14\cdot13}{2\cdot1}=91$（個）

(2) x，y，z は自然数で，$x+y+z=12$ とする。

$x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とおくと　$X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Z\geqq0$

また，$x+y+z=12$ から　$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=12$

よって　$X+Y+Z=9$

この等式を満たす負でない X，Y，Z の組は，(1)と同様に考えて，異なる3個の文字 X，Y，Z から重複を許して9個取る組合せの総数と等しい。

よって，求める組の個数は　$_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=\dfrac{11\cdot10}{2\cdot1}=55$（個）

別解　等式を満たす x，y，z の組は，12個の○を1列に並べ，その間の11か所のうち2か所に仕切り | を入れ，仕切りで分けられた3か所の○の個数を，左から順に x，y，z とすると得られる。

よって，求める組の個数は　$_{11}C_2=\dfrac{11\cdot10}{2\cdot1}=55$（個）

18 1個のさいころを3回投げて出る目の数を順に a，b，c とする。$a\leqq b\leqq c$ となる場合は何通りあるか。

解答　56通り

1～6の6つの目から重複を許して3個取り，大きくないものから，順に a，b，c とすればよいから　$_{6+3-1}C_3={}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$（通り）

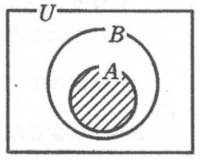
1 全体集合 U とその部分集合 A, B について， $n(U)=50$, $n(A)=23$, $n(B)=35$ が成り立つとき，$n(A\cap B)$ のとりうる値の最大値，最小値を求めよ。

解答 最大値 23，最小値 8

$n(A\cap B)$ が最大値をとるのは $A\subset B$ のときである。

このとき，$A\cap B=A$ であり

$$n(A\cap B)=n(A)=23$$



$A\subset B$

また，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ から

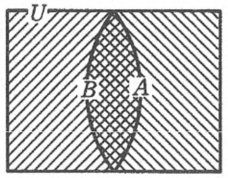
$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$
$$=58-n(A\cup B)$$

よって，$n(A\cap B)$ が最小値をとるのは，$n(A\cup B)$ が最大となるとき，すなわち $A\cup B=U$ のときである。

このとき

$$n(A\cap B)=58-n(U)=58-50=8$$

よって　最大値 23，最小値 8



$A\cup B=U$

2 150 以下の自然数のうち，3，4，5 の少なくとも 1 つで割り切れる数は何個あるか。

かぶっている部分を引いてない

解答 90 個

150 以下の自然数のうち，3 の倍数，4 の倍数，5 の倍数全体の集合を，それぞれ A，B，C とすると　$n(A)=50$，$n(B)=37$，$n(C)=30$

また，$A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$，$A\cap B\cap C$ は，それぞれ 12 の倍数，20 の倍数，15 の倍数，60 の倍数全体の集合であるから

$$n(A\cap B)=12,\ n(B\cap C)=7,\ n(C\cap A)=10$$
$$n(A\cap B\cap C)=2$$

3，4，5 の少なくとも 1 つで割り切れる数全体の集合は $A\cup B\cup C$ であるから

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$
$$=50+37+30-12-7-10+2=90\ (個)$$

3 次の硬貨の一部または全部でちょうど支払うことのできる金額は何通りあるか。

(1) 10 円硬貨 2 枚，50 円硬貨 1 枚，100 円硬貨 6 枚

(2) 10 円硬貨 3 枚，50 円硬貨 3 枚，100 円硬貨 3 枚

(2) 4×4×4−1 というミス多し

解答 (1) 41 通り　(2) 39 通り

(1)(2) 0円は支払えない

(1) 異なる硬貨を用いて，同じ金額を表せない。

10 円硬貨の使い方は 0 枚～2 枚の　3 通り

50 円硬貨の使い方は 0 枚～1 枚の　2 通り

100 円硬貨の使い方は 0 枚～6 枚の　7 通り

ただし，全部 0 枚の場合は支払うことができない。

よって，支払うことのできる金額は　$3\times2\times7-1=41$ (通り)

(2) 50 円硬貨 2 枚と 100 円硬貨 1 枚は同じ金額を表す。

100 円硬貨 3 枚は 50 円硬貨 6 枚と考えると，硬貨は 10 円硬貨 3 枚，50 円硬貨 9 枚となる。

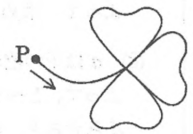
10 円硬貨の使い方は 0 枚～3 枚の　4 通り

50 円硬貨の使い方は 0 枚～9 枚の　10 通り

ただし，全部 0 枚の場合は支払うことができない。

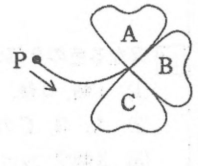
よって，支払うことのできる金額は　$4\times10-1=39$ (通り)

4 右の図を，点 P を出発点として一筆書きする方法は何通りあるか。



解答 48 通り

3 枚の葉っぱを，右の図のようにそれぞれ A，B，C とする。



1 番目に書く葉っぱは，A，B，C のどれかで　3 通り

そのどの場合に対しても，2 番目に書く葉っぱは，1 番目に書いた葉っぱ以外の 2 通りであり，3 番目に書く葉っぱは 1 通りに決まる。

よって，葉っぱ A，B，C を書く順序は　$3\times2\times1=6$ (通り)

また，それぞれの葉っぱを右回りで書くか，左回りで書くかで

$2\times2\times2=8$ (通り)

よって，図を一筆書きする方法は　$6\times8=48$ (通り)

別解 $6\times4\times2=48$ 通り

5 C，L，E，A，R の 5 文字を全部使ってできる順列を，ACELR を 1 番目として，辞書式に並べるとき，次の問いに答えよ。

(1) 81 番目の文字列を求めよ。　(2) ELARC は何番目の文字列か。

解答 (1) LCEAR　(2) 62 番目

(1) A○○○○，C○○○○，E○○○○ の形の文字列は，それぞれ 4! 個ある。

LA○○○ の形の文字列は 3! 個ある。

ここまでの文字列の個数は　$4!\times3+3!=72+6=78$ (個)

よって，81 番目の文字列は LC○○○ の形の 3 番目の文字列である。

LC○○○ の形の文字列は LCAER，LCARE，LCEAR，…… と並ぶから，81 番目の文字列は　LCEAR

(2) A○○○○，C○○○○ の形の文字列は全部で $4!\times2$ 個ある。

EA○○○，EC○○○ の形の文字列は全部で $3!\times2$ 個ある。

ここまでの文字列の個数は

$4!\times2+3!\times2=48+12=60$ (個)

ELARC は，EL○○○ の形の 2 番目の文字列であるから

$60+2=62$ (番目)

6 男子 3 人，女子 4 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。

(1) 両端が男子である。　(2) 女子 4 人が続いて並ぶ。

(3) 男子，女子が交互に並ぶ。

(1) ${}_3P_2$ を考えていない者がいる

解答 (1) 720 通り　(2) 576 通り　(3) 144 通り

(1) 両端の男子 2 人の並び方は　${}_3P_2$ 通り

そのどの場合に対しても，間に並ぶ残り 5 人の並び方は　5! 通り

よって，並び方の総数は，積の法則により

${}_3P_2\times5!=3\cdot2\times5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ (通り)

(2) 女子 4 人をひとまとめにする。

男子 3 人とひとまとめにした女子の並び方は　4! 通り

そのどの場合に対しても，ひとまとめにした女子 4 人の並び方は　4! 通り

よって，並び方の総数は，積の法則により

$4!\times4!=4\cdot3\cdot2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1=576$ (通り)

(3) 女男女男女男女と並ぶ場合である。

女子 4 人の並び方は　4! 通り

男子 3 人の並び方は　3! 通り

よって，並び方の総数は，積の法則により

$4!\times3!=4\cdot3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1=144$ (通り)

7 大人 2 人と子ども 4 人が，円形の 6 人席のテーブルに着席するとき，次のような並び方は何通りあるか。

(1) 大人 2 人が向かい合う。

(2) 大人 2 人の間に子どもがちょうど 1 人入る。

解答 (1) 24 通り　(2) 48 通り

(1) 大人 1 人の位置を固定して考えると，もう 1 人の大人の位置はその向かい合う席に決まる。

残りの席に子ども 4 人が座ればよいから，求める並び方は

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ (通り)

(2) 大人 1 人の位置を固定して考えると，もう 1 人の大人の位置は 2 通りある。

残りの席に子ども 4 人が座ればよいから，求める並び方は

$2\times4!=2\times4\cdot3\cdot2\cdot1=48$ (通り)

8 色の異なる 8 個の玉をすべて用いて作る首飾りは何種類あるか。

(÷2していない者多し)

解答 2520 種類

8 個の玉の円順列を作ると，裏返して同じになるものが 2 つずつできる。

よって　$(8-1)!\div2=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\div2$
$=2520$ (種類)

9 立方体の各面に，隣り合った面の色は異なるように，色を塗りたい。ただし，立方体を回転させて一致する塗り方は同じとみなす。

(1) 異なる 6 色をすべて使って塗る方法は何通りあるか。

(2) 異なる 5 色をすべて使って塗る方法は何通りあるか。

解答 (1) 30 通り　(2) 15 通り

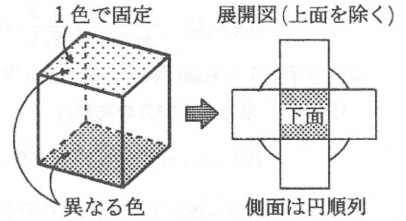
(1) ある面を 1 つの色で塗り，それを上面に固定する。

このとき，下面の色は残りの色で塗るから　5 通り

そのおのおのについて，側面の塗り方は，異なる 4 個の円順列で

$(4-1)!=3!=6$ (通り)

よって　$5\times6=30$ (通り)



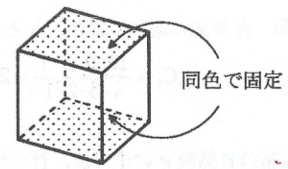
(2) 2 面を塗る色の選び方は 5 通り。

その色で上面と下面を塗ると，そのおのおのについて，側面の塗り方には，上下を裏返すと塗り方が一致する場合が含まれている。

ゆえに，異なる 4 個のじゅず順列で

$$\frac{(4-1)!}{2}=\frac{3!}{2}=3\ (通り)$$

よって　$5\times3=15$ (通り)



(2)で、ひっくり返して同じものが現れることに気が付かない

10 正四角錐の5つの面を，赤青黄緑紫の5色すべてを使って塗り分ける方法は何通りあるか。

回転することを考えていない

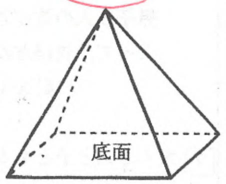
解答 30通り

底面の色の塗り方は　5通り

側面の色の塗り方は，残り4色の円順列であるから

$(4-1)!$ 通り

よって　$5\times(4-1)!=30$ (通り)



11 (1) 6人がA，Bの2部屋に入る方法は，何通りあるか。ただし，全員が1つの部屋に入ってもよい。

(2) 6人が2つの組に分かれる方法は何通りあるか。

解答 (1) 64通り　(2) 31通り

(1) 6人それぞれについて，Aに入るかBに入るかの2通りあるから

$2^6=64$ (通り)

(2) (1)の分け方のうち，Aに全員入る方法とBに全員入る方法を除くと

$64-2=62$ (通り)

この分け方で，A，Bの区別をなくせばよいから

$\dfrac{62}{2!}=31$ (通り)

12 男子8人，女子4人の中から5人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか。

(1) すべての選び方　(2) 男子3人，女子2人を選ぶ。

(3) 女子が少なくとも1人選ばれる。　(4) 特定の2人A，Bがともに選ばれる。

(5) Aは選ばれるが，Bは選ばれない。

解答 (1) 792通り　(2) 336通り　(3) 736通り　(4) 120通り　(5) 210通り

(1) 男女合わせた12人から5人を選ぶから

$${}_{12}C_5=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=792 \text{ (通り)}$$

・CがPになっている者がいる。

(2) 男子3人の選び方は　${}_8C_3$ 通り

女子2人の選び方は　${}_4C_2$ 通り

よって，求める選び方の総数は

$${}_8C_3\times{}_4C_2=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=336 \text{ (通り)}$$

・${}_8C_3+{}_4C_2$ 足している者がいる

(3) 女子が1人も選ばれず，5人とも男子となる選び方は　${}_8C_5$ 通り

(1)から，求める選び方の総数は

$$792-{}_8C_5=792-{}_8C_3=792-\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=736 \text{ (通り)}$$

(4) A，Bを先に選んでおき，残りの10人から3人を選ぶと考えて

$${}_{10}C_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120 \text{ (通り)}$$

$4\times{}_{11}C_4$ というミスあり

(5) Aを先に選んでおき，AとBを除いた残りの10人から4人を選ぶと考えて

$${}_{10}C_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210 \text{ (通り)}$$

13 4桁の自然数 n の千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ a，b，c，d とする。次の条件を満たす n は何個あるか。

(1) $a>b>c>d$　(2) $a<b<c<d$

解答 (1) 210個　(2) 126個

(1) 0～9の10個の数字から異なる4個を選んで，大きいものから順に a，b，c，d とすると，条件を満たす自然数 n ができる。

よって，求める自然数 n の個数は　${}_{10}C_4=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$ (個)

(2) a は千の位の数字であるから　$a\neq0$

よって，1～9の9個の数字から異なる4個を選んで，小さいものから順に a，b，c，d とすると，条件を満たす自然数 n ができる。

したがって，求める自然数 n の個数は　${}_9C_4=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$ (個)

14 異なる色の9個の玉を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1) 4個，3個，2個の3つの組に分ける。

(2) A，B，Cの3つの組に3個ずつ分ける。

(3) 3個ずつの3つの組に分ける。

(4) 2個，2個，2個，3個の4つの組に分ける。

解答 (1) 1260通り　(2) 1680通り　(3) 280通り　(4) 1260通り

(1) 9個の玉から4個を選ぶ方法は　${}_9C_4$ 通り

残り5個の玉から3個を選ぶ方法は　${}_5C_3$ 通り

4個，3個の組が決まれば，2個の組は決まる。

よって，分け方の総数は

$${}_9C_4\times{}_5C_3=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=1260 \text{ (通り)}$$

参考 2個，3個，4個の組を順に選ぶと考えて ${}_9C_2\times{}_7C_3$ を計算してもよい。

(2) Aの3個の選び方は　${}_9C_3$ 通り

Bの3個の選び方は，残りの6個から選ぶので　${}_6C_3$ 通り

A，Bの玉が決まれば，残りのCの3個は決まる。

よって，分け方の総数は

$${}_9C_3\times{}_6C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=1680 \text{ (通り)}$$

(3)(4)で割っていない者多し。

(3) (2)で，同じ個数の組のA，B，Cの区別をなくすと，3! 通りずつ同じ組分けができる。よって，分け方の総数は

$$\frac{1680}{3!}=\frac{1680}{6}=280 \text{ (通り)}$$

(4) 9個の玉を2個，2個，2個，3個の4つの組A，B，C，Dに分けるとき，分け方は，(2)と同様に考えて　${}_9C_2\times{}_7C_2\times{}_5C_2$ 通り

この分け方で，A，B，Cの区別をなくせばよい。

よって，分け方の総数は

$$\frac{{}_9C_2\times{}_7C_2\times{}_5C_2}{3!}=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}\times\frac{7\cdot6}{2\cdot1}\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times\frac{1}{6}=1260 \text{ (通り)}$$

4! で割っている者がいる

15 0000から9999までの番号のうちで，0101，0033のように，同じ数字を2個ずつ含むものは何個あるか。

解答 270個

0から9までの10個の数字から2個を選ぶ組合せは ${}_{10}C_2$ 通りある。

同じ数字を2個ずつ含む4個の数字を1列に並べる順列は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通りある。

よって，条件を満たす番号の総数は

$${}_{10}C_2\times\frac{4!}{2!2!}=\frac{10\cdot9}{2\cdot1}\times\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=270 \text{ (個)}$$

16 YOKOHAMAの8文字すべてを1列に並べる。

(1) Y，K，H，Mがこの順にある並べ方は何通りあるか。

(2) OとAが必ず偶数番目にある並べ方は何通りあるか。

解答 (1) 420通り　(2) 144通り

(1) Y，K，H，Mを同じ文字□と考え，□4個，O2個，A2個を1列に並べる順列を作り，□に左からY，K，H，Mを順に入れると，Y，K，H，Mがこの順にある並べ方になる。

したがって　$\dfrac{8!}{4!2!2!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\times2\cdot1\times2\cdot1}=420$ (通り)

(2) 偶数番目の4か所にはO，O，A，Aが入るから，その並べ方は

$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

奇数番目の4か所にはY，K，H，Mが入るから，その並べ方は　4! 通り

したがって　$\dfrac{4!}{2!2!}\times4!=144$ (通り)

17 $x+y+z=12$ と次の条件を満たす x，y，z の組は，全部で何個あるか。

(1) x，y，z は負でない整数　(2) x，y，z は自然数

解答 (1) 91個　(2) 55個

(1) 求める組の個数は，異なる3個の文字 x，y，z から重複を許して12個取る組合せの総数と等しいから　${}_{3+12-1}C_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=\dfrac{14\cdot13}{2\cdot1}=91$ (個)

別解 等式を満たす x，y，z の組は，12個の○と2個の仕切り | の順列を作り，仕切りで分けられた3か所の○の個数を，左から順に x，y，z とすると得られる。

よって，求める組の個数は，12個の○と2個の | を1列に並べる順列の総数に等しいから　$\dfrac{14!}{12!2!}=\dfrac{14\cdot13}{2\cdot1}=91$ (個)

(2) x，y，z は自然数で，$x+y+z=12$ とする。

$x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とおくと　$X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Z\geqq0$

また，$x+y+z=12$ から　$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=12$

よって　$X+Y+Z=9$

この等式を満たす負でない X，Y，Z の組は，(1)と同様に考えて，異なる3個の文字 X，Y，Z から重複を許して9個取る組合せの総数と等しい。

よって，求める組の個数は　${}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=\dfrac{11\cdot10}{2\cdot1}=55$ (個)

別解 等式を満たす x，y，z の組は，12個の○を1列に並べ，その間の11か所のうち2か所に仕切り | を入れ，仕切りで分けられた3か所の○の個数を，左から順に x，y，z とすると得られる。

よって，求める組の個数は　${}_{11}C_2=\dfrac{11\cdot10}{2\cdot1}=55$ (個)

18 1個のさいころを3回投げて出る目の数を順に a，b，c とする。$a\leqq b\leqq c$ となる場合は何通りあるか。

解答 56通り

1～6の6つの目から重複を許して3個取り，大きくないものから，順に a，b，c とすればよいから　${}_{6+3-1}C_3={}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ (通り)