統一テスト（図形と計量）Ｒ２．１１．９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．$\angle A=90°$ の直角三角形 ABC の頂点 A から斜辺 BC に垂線 AD を下ろす。$\angle ABC=\theta$，$BC=a$ であるとき，次の線分の長さを a，θ を用いて表せ。

(1)　AB　　(2)　AD

２．$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

３．$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。次の式のとりうる値の範囲を求めよ。　$-3\cos\theta+1$

４．$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　　(3)　$\sin\theta-\cos\theta$

５．$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。等式 $2\cos^2\theta-\sin\theta-1=0$ を満たす θ を求めよ。

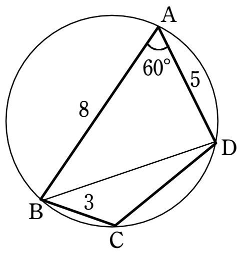
６．次の式の値を求めよ。　$\cos 10°\sin 80°-\cos 100°\sin 10°$

７．$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta \geqq \dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

８．$\triangle ABC$ において，$b=2\sqrt{3}$，$c=2$，$C=30°$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

9．円に内接する四角形 ABCD において，
$\angle A=60^\circ$，AB＝8，BC＝3，DA＝5 のとき，
次のものを求めよ。
(1)　線分 BD の長さ　　(2)　線分 CD の長さ



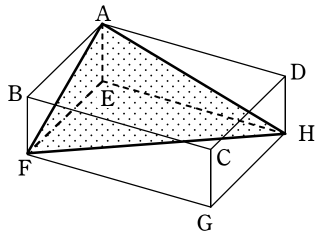
10. $a=4$，$b=5$，$c=6$ である△ABC において，次のものを求めよ。
(1)　△ABCの面積 S　　(2)　内接円の半径 r

11. △ABC において，AB＝5，AC＝3，$A=120^\circ$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，次の長さを求めよ。
(1)　線分 AD　　(2)　線分 BD

12. 円に内接する四角形 ABCD において，AB＝4，BC＝3，CD＝2，DA＝2 のとき，次のものを求めよ。
(1)　$\cos A$ の値　　(2)　BD の長さ
(3)　円の半径 R　　(4)　四角形 ABCD の面積 S

13. △ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C=\sqrt{2} : \sqrt{5} : 1$ が成り立つとき，この三角形の最大の角の大きさを求めよ。

14. 右の図のような直方体 ABCD－EFGH において，
AE＝$\sqrt{10}$，AF＝8，AH＝10 とする。
(1)　△AFH の面積を求めよ。
(2)　点 E から △AFH に下ろした垂線 EP の長さを求めよ。



1．$\angle A=90°$ の直角三角形 ABC の頂点 A から斜辺 BC に垂線 AD を下ろす。$\angle ABC=\theta$，BC$=a$ であるとき，次の線分の長さを a，θ を用いて表せ。

(1) AB　　(2) AD

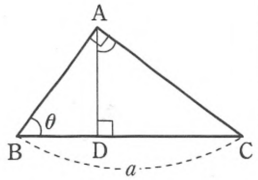
解答 (1) $a\cos\theta$ 2　(2) $a\sin\theta\cos\theta$ 2

解説

(1) $AB=BC\cos\theta=a\cos\theta$

(2) $AD=AB\sin\theta=a\cos\theta\cdot\sin\theta$

$=a\sin\theta\cos\theta$



2．$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。$\sin\theta=\frac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

解答 $\cos\theta=\frac{4}{5}$，$\tan\theta=\frac{3}{4}$ または $\cos\theta=-\frac{4}{5}$，$\tan\theta=-\frac{3}{4}$　3　3

解説

$\sin\theta=\frac{3}{5}$ から，$0°<\theta<90°$ または $90°<\theta<180°$ である。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

$0°<\theta<90°$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{5}\div\frac{4}{5}=\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

$90°<\theta<180°$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{5}\div\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{3}{4}$$

正しくない記述アウト

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=\pm\frac{4}{5}$

など

$\cos\theta=\pm\frac{4}{5}$，$\tan\theta=\pm\frac{3}{4}$

はダメな考え方

3

3．$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。次の式のとりうる値の範囲を求めよ。　$-3\cos\theta+1$

解答 $-2\leqq-3\cos\theta+1\leqq4$　4

解説

$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき　$-1\leqq\cos\theta\leqq1$

各辺に -3 を掛けて　$-3\leqq-3\cos\theta\leqq3$

各辺に 1 を加えて　$-2\leqq-3\cos\theta+1\leqq4$

4．$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$　(3) $\sin\theta-\cos\theta$

解答 (1) $-\frac{1}{8}$ 3　(2) $\frac{9\sqrt{3}}{16}$ 3　(3) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 3

解説

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{3}{4}$$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$

したがって　$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{8}$

a^3+b^3
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
公式ミスアウト

$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$
$\longrightarrow$ $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$ のミスアウト

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{16}$$

別解 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}=\frac{9\sqrt{3}}{16}$$

(3) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$$=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{4}$$ -1

$\sin\theta\cos\theta<0$ であるから　$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$

よって，$\sin\theta-\cos\theta>0$ であるから　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

5．$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。等式 $2\cos^2\theta-\sin\theta-1=0$ を満たす θ を求めよ。

解答 $\theta=30°$，$150°$　6

解説

$2\cos^2\theta-\sin\theta-1=0$ から　$2(1-\sin^2\theta)-\sin\theta-1=0$

よって　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

$\sin\theta=t$ とおくと　$2t^2+t-1=0$

左辺を因数分解すると　$(t+1)(2t-1)=0$

したがって　$t=-1$，$\frac{1}{2}$　3

$0°\leqq\theta\leqq180°$ より $0\leqq t\leqq1$ であるから　$t=\frac{1}{2}$

すなわち　$\sin\theta=\frac{1}{2}$

よって　$\theta=30°$，$150°$

6．次の式の値を求めよ。　$\cos10°\sin80°-\cos100°\sin10°$

解答 1　4

解説

$\sin80°=\sin(90°-10°)=\cos10°$

$\cos100°=\cos(180°-80°)=-\cos80°=-\cos(90°-10°)=-\sin10°$

であるから

与式$=\cos10°\cos10°-(-\sin10°)\sin10°$

$=\cos^2 10°+\sin^2 10°=1$

7．$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1) $\sin\theta>\frac{1}{\sqrt{2}}$　(2) $\cos\theta\geqq\frac{1}{2}$　(3) $\tan\theta\geqq-\frac{1}{\sqrt{3}}$

解答 (1) $45°<\theta<135°$ 3　(2) $0°\leqq\theta\leqq60°$ 3　(3) $0°\leqq\theta<90°$，$150°\leqq\theta\leqq180°$ 3

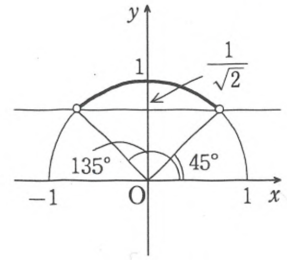
解説

(1) $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は

$\theta=45°$，$135°$　1

右の図から，不等式を満たす θ の範囲は

$45°<\theta<135°$

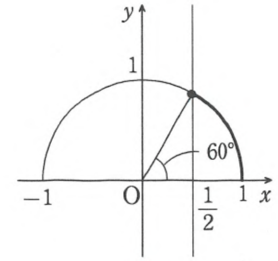


(2) $\cos\theta=\frac{1}{2}$ を満たす θ は

$\theta=60°$　1

右の図から，不等式を満たす θ の範囲は

$0°\leqq\theta\leqq60°$

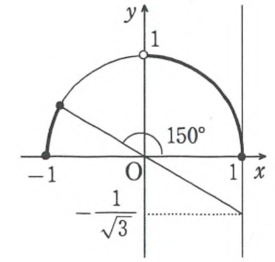


(3) $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ は

$\theta=150°$　1

右の図から，不等式を満たす θ の範囲は

$0°\leqq\theta<90°$，$150°\leqq\theta\leqq180°$



8．△ABC において，$b=2\sqrt{3}$，$c=2$，$C=30°$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

解答 $a=4$，$A=90°$，$B=60°$ または $a=2$，$A=30°$，$B=120°$　3　3

解説

△ABC において，正弦定理により　$\frac{2\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{2}{\sin30°}$

よって　$\sin B=2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

これを満たす B は　$B=60°$，$120°$

$B=60°$ のとき

$A=180°-(60°+30°)=90°$

△ABC は $A=90°$ の直角三角形であるから，三平方の定理により

$a=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{16}=4$

$B=120°$ のとき

$A=180°-(120°+30°)=30°$

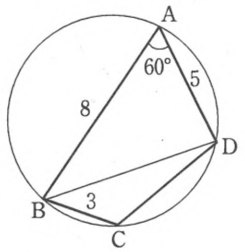
$A=C$ であるから，△ABC は AB＝BC の二等辺三角形である。

したがって　$a=c=2$

答 $a=4$，$A=90°$，$B=60°$　または　$a=2$，$A=30°$，$B=120°$

/48

9．円に内接する四角形 ABCD において，
$\angle A=60°$，$AB=8$，$BC=3$，$DA=5$ のとき，
次のものを求めよ。
(1) 線分 BD の長さ　　(2) 線分 CD の長さ



解答 (1) 7　(2) 5　4　4

解説
(1) △ABD に余弦定理を使うと
$$BD^2=8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cdot\cos60°=64+25-40=49$$
$BD>0$ であるから　$BD=7$
(2) 円に内接する四角形において，向かい合う角の和は 180° であるから
$$\angle BCD=120°$$
よって，$CD=x$ とおいて，△BCD に余弦定理を使うと
$$7^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cos120°$$
すなわち　$x^2+3x-40=0$
これを解いて　$x=5,\ -8$
$x>0$ であるから　$x=5$
したがって　$CD=5$

かっこなし -1

10．$a=4$，$b=5$，$c=6$ である△ABC において，次のものを求めよ。
(1) △ABCの面積 S　　(2) 内接円の半径 r

解答 (1) $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$　(2) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　4　4

解説
(1) 余弦定理により　$\cos A=\dfrac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}=\dfrac{3}{4}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

△ABC の面積を S とすると　$S=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}r(4+5+6)=\dfrac{15}{2}r$

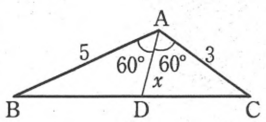
よって，$\dfrac{15}{2}r=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$ から　$r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

外接円と
間違えて
いる者多し

11．△ABC において，$AB=5$，$AC=3$，$A=120°$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，次の長さを求めよ。
(1) 線分 AD　　(2) 線分 BD

解答 (1) $\dfrac{15}{8}$　(2) $\dfrac{35}{8}$　4　4

解説
(1) 三角形の面積について
△ABC＝△ABD＋△ACD
よって，$AD=x$ とおくと
$$\frac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\sin120°$$
$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot x\sin60°+\frac{1}{2}\cdot3\cdot x\sin60°$$



$\sin120°=\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから　$15=5x+3x$

したがって　$x=\dfrac{15}{8}$　すなわち　$AD=\dfrac{15}{8}$

(2) △ABCで余弦定理より
$BC^2=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cdot\cos120°=25+9+15=49$
$BC>0$ より　$BC=7$
角の二等分線の性質より　AB：AC＝BD：CD　よって　BD：DC＝5：3
ゆえに，$BD=\dfrac{5}{5+3}BC=\dfrac{5}{8}\cdot7=\dfrac{35}{8}$

参考 △ABDで余弦定理を用いてもいいが，計算が大変である

できが悪い

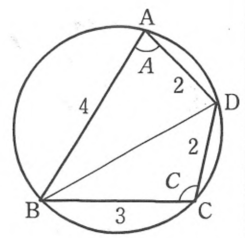
12．円に内接する四角形 ABCD において，$AB=4$，$BC=3$，$CD=2$，$DA=2$ のとき，次のものを求めよ。

できが悪い

(1) $\cos A$ の値　　(2) BD の長さ
(3) 円の半径 R　　(4) 四角形 ABCD の面積 S

解答 (1) $\dfrac{1}{4}$　(2) 4　(3) $\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$　(4) $\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$　3　3　3　3

解説
(1) △ABD に余弦定理を使うと
$BD^2=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cos A$
$=20-16\cos A$　……①
四角形 ABCD は円に内接するから　$C=180°-A$
△BCD に余弦定理を使うと
$BD^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos(180°-A)$
$=13+12\cos A$　……②
①，② から　$20-16\cos A=13+12\cos A$
整理して　$28\cos A=7$
ゆえに　$\cos A=\dfrac{1}{4}$　……③



(2) ①，③ から　$BD^2=20-16\cdot\dfrac{1}{4}=16$

$BD>0$ であるから　$BD=\sqrt{16}=4$

(3) △ABD に正弦定理を使うと　$\dfrac{BD}{\sin A}=2R$

ゆえに　$R=\dfrac{BD}{2\sin A}=\dfrac{4}{2\sin A}=\dfrac{2}{\sin A}$

$\sin A>0$ であるから，③ より

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって　$R=2\cdot\dfrac{4}{\sqrt{15}}=\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$

(4) $S=\triangle ABD+\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot2\sin A+\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin C$

$=4\sin A+3\sin C$

$\sin C=\sin(180°-A)=\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ であるから

$S=4\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}+3\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

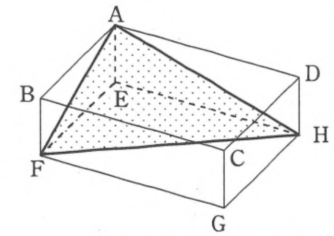
13．△ABC において，$\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{2}:\sqrt{5}:1$ が成り立つとき，この三角形の最大の角の大きさを求めよ。

Eなし -2

解答 $B=135°$　6

解説
正弦定理により $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ が成り立つから
$a:b:c=\sqrt{2}:\sqrt{5}:1$　2
このとき，正の数 k を用いて $a=\sqrt{2}k$，$b=\sqrt{5}k$，$c=k$ と表すことができる。
b が最大の辺であるから，B が最大の角である。
余弦定理により
$$\cos B=\frac{k^2+(\sqrt{2}k)^2-(\sqrt{5}k)^2}{2\cdot k\cdot\sqrt{2}k}=\frac{-2k^2}{2\cdot k\cdot\sqrt{2}k}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
よって，最大の角の大きさは　$B=135°$

14．右の図のような直方体 ABCD－EFGH において，
$AE=\sqrt{10}$，$AF=8$，$AH=10$ とする。
(1) △AFH の面積を求めよ。
(2) 点 E から△AFH に下ろした垂線 EP の長さを求めよ。



解答 (1) $15\sqrt{7}$　(2) $\dfrac{3\sqrt{42}}{7}$　6　4

∠FAH＝90°
としている者多し

解説
(1) 三平方の定理により
$EF=\sqrt{AF^2-AE^2}=\sqrt{8^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$
$EH=\sqrt{AH^2-AE^2}=\sqrt{10^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$
よって　$FH=\sqrt{EF^2+EH^2}=\sqrt{(3\sqrt{6})^2+(3\sqrt{10})^2}=3\sqrt{16}=12$
△AFH に余弦定理を使うと
$$\cos\angle FAH=\frac{AF^2+AH^2-FH^2}{2AF\cdot AH}=\frac{8^2+10^2-12^2}{2\cdot8\cdot10}=\frac{1}{8}$$　3
$\sin\angle FAH>0$ であるから
$$\sin\angle FAH=\sqrt{1-\cos^2\angle FAH}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$
よって　$\triangle AFH=\dfrac{1}{2}AF\cdot AH\sin\angle FAH=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot10\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{8}=15\sqrt{7}$

ヘロンの
公式
でも良い

(2) 四面体 AEFH の体積を V とすると
$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle FHE\times AE=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}EF\cdot EH\right)\cdot AE$
$=\dfrac{1}{6}\cdot3\sqrt{6}\cdot3\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=15\sqrt{6}$　2
また，四面体 AEFH について，△AFH を底面としてみると
$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle AFH\times EP$
$EP=x$ とおくと　$V=\dfrac{1}{3}\times15\sqrt{7}\times x=5\sqrt{7}x$
よって　$15\sqrt{6}=5\sqrt{7}x$
したがって　$x=\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{42}}{7}$

/52