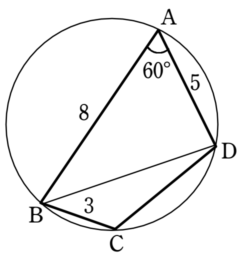
数学演習（図形と計量）Ｒ２．１１．４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．△ABC において，$b=2\sqrt{3}$，$c=2$，$C=30°$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

2．円に内接する四角形 ABCD において，
$\angle A=60°$，$AB=8$，$BC=3$，$DA=5$ のとき，
次のものを求めよ。
(1)　線分 BD の長さ　　(2)　線分 CD の長さ

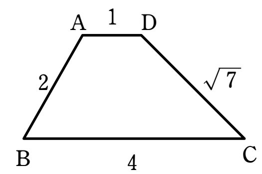



3．△ABC において，外接円の半径を $R$ とする。$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$，
$R=\sqrt{15}$ のとき　$a$を求めよ。

4．△ABC において，$\dfrac{\sin A}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sin B}{2}=\dfrac{\sin C}{\sqrt{2}}$ が成り立つとき，この三角形の最小の角の大きさを求めよ。

5．$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。等式 $2\cos^2\theta-\sin\theta-1=0$ を満たす $\theta$ を求めよ。

6．台形 ABCD において，AD∥BC，$AB=2$，$BC=4$，
$CD=\sqrt{7}$，$DA=1$ のとき，この台形の面積 $S$ を求めよ。




7．△ABC において，$AB=5$，$AC=3$，$A=120°$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

8．△ABCにおいて，次の等式が成り立つことを示せ。$(a^2+b^2)\sin C=c(a\sin A+b\sin B)$

9．△ABCにおいて，等式 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$ が成り立つとき，この三角形はどのような形をしているか。

10. $a=4$，$b=5$，$c=6$ である△ABCにおいて，内接円の半径 $r$ を求めよ。

11. 円に内接する四角形ABCDにおいて，AB＝4，BC＝3，CD＝2，DA＝2のとき，次のものを求めよ。

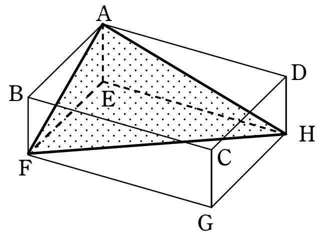
(1)　$\cos A$ の値　　(2)　BDの長さ

(3)　円の半径 $R$　　(4)　四角形ABCDの面積 $S$

12. 右の図のような直方体ABCD－EFGHにおいて，AE＝$\sqrt{10}$，AF＝8，AH＝10とする。

(1)　△AFHの面積を求めよ。

(2)　点Eから△AFHに下ろした垂線EPの長さを求めよ。




13. 四面体ABCDにおいて，AD＝BC＝4，AB＝AC＝$\sqrt{13}$，BD＝CD＝$\sqrt{21}$ である。BCの中点をMとするとき，次のものを求めよ。

(1)　△AMDの面積 $S$　　(2)　四面体ABCDの体積 $V$

14. すべての辺の長さが2である正四角錐A－BCDEに球が内接している。

(1)　辺BCの中点をMとするとき，AMの長さを求めよ。

(2)　球の半径 $r$，表面積 $S$，体積 $V$ を求めよ。

１．△ABC において，$b=2\sqrt{3}$，$c=2$，$C=30^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

解答　$a=4$，$A=90^\circ$，$B=60^\circ$ または $a=2$，$A=30^\circ$，$B=120^\circ$

解説

△ABC において，正弦定理により　$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B}=\dfrac{2}{\sin 30^\circ}$

よって　$\sin B=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

これを満たす $B$ は　$B=60^\circ$，$120^\circ$

$B=60^\circ$ のとき

$A=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$

△ABC は $A=90^\circ$ の直角三角形であるから，三平方の定理により

$a=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{16}=4$

$B=120^\circ$ のとき

$A=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

$A=C$ であるから，△ABC は AB＝BC の二等辺三角形である。

したがって　$a=c=2$

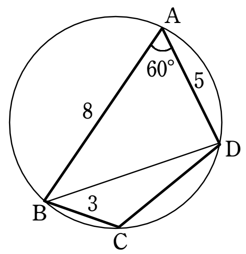
答　$a=4$，$A=90^\circ$，$B=60^\circ$　または　$a=2$，$A=30^\circ$，$B=120^\circ$

２．円に内接する四角形 ABCD において，

∠A＝60°，AB＝8，BC＝3，DA＝5 のとき，

次のものを求めよ。

(1)　線分 BD の長さ　　(2)　線分 CD の長さ




解答　(1)　7　　(2)　5

解説

(1)　△ABD に余弦定理を使うと

$\mathrm{BD}^2=8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos 60^\circ=64+25-40=49$

$\mathrm{BD}>0$ であるから　　$\mathrm{BD}=7$

(2)　円に内接する四角形において，向かい合う角の和は 180° であるから

$\angle\mathrm{BCD}=120^\circ$

よって，$\mathrm{CD}=x$ とおいて，△BCD に余弦定理を使うと

$7^2=3^2+x^2-2\cdot 3\cdot x\cos 120^\circ$

すなわち　　$x^2+3x-40=0$

これを解いて　　$x=5$，$-8$

$x>0$ であるから　　$x=5$

したがって　　$\mathrm{CD}=5$

３．△ABC において，外接円の半径を $R$ とする。$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$，

$R=\sqrt{15}$ のとき　$a$を求めよ。　　解答　$a=\dfrac{15}{4}$

解説

正弦定理により $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ が成り立つから

$a:b:c=2:3:4$

このとき，正の数 $k$ を用いて $a=2k$，$b=3k$，$c=4k$ と表すことができる。

余弦定理により　　$\cos A=\dfrac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\cdot 3k\cdot 4k}=\dfrac{21k^2}{24k^2}=\dfrac{7}{8}$

$\sin A>0$ であるから　　$\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{8}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

正弦定理により　　$\dfrac{a}{\sin A}=2R$

したがって　　$a=2R\sin A=2\cdot\sqrt{15}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{8}=\dfrac{15}{4}$

４．△ABC において，$\dfrac{\sin A}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sin B}{2}=\dfrac{\sin C}{\sqrt{2}}$ が成り立つとき，この三角形の最小の角の大きさを求めよ。　　解答　$C=30^\circ$

解説

$\dfrac{\sin A}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sin B}{2}=\dfrac{\sin C}{\sqrt{2}}$ から

$\sin A:\sin B:\sin C=(1+\sqrt{3}):2:\sqrt{2}$

正弦定理により $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ が成り立つから

$a:b:c=(1+\sqrt{3}):2:\sqrt{2}$

このとき，正の数 $k$ を用いて $a=(1+\sqrt{3})k$，$b=2k$，$c=\sqrt{2}\,k$ と表すことができる。

$c$ が最小の辺であるから，$C$ が最小の角である。

余弦定理により

$$\cos C=\frac{\{(1+\sqrt{3})k\}^2+(2k)^2-(\sqrt{2}\,k)^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})k\cdot 2k}=\frac{2(3+\sqrt{3})k^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})k\cdot 2k}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，最小の角の大きさは　　$C=30^\circ$

５．$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ とする。等式 $2\cos^2\theta-\sin\theta-1=0$ を満たす $\theta$ を求めよ。

解答　$\theta=30^\circ$，$150^\circ$

解説

$2\cos^2\theta-\sin\theta-1=0$ から　　$2(1-\sin^2\theta)-\sin\theta-1=0$

よって　　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

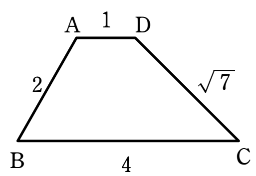
$\sin\theta=t$ とおくと　　$2t^2+t-1=0$

左辺を因数分解すると　　$(t+1)(2t-1)=0$　　　したがって　　$t=-1$，$\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より $0\leqq t\leqq 1$ であるから　　$t=\dfrac{1}{2}$

すなわち　　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　　　　よって　　$\theta=30^\circ$，$150^\circ$

６．台形 ABCD において，AD∥BC，AB＝2，BC＝4，CD＝$\sqrt{7}$，DA＝1 のとき，この台形の面積 $S$ を求めよ。




解答　$\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

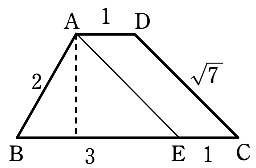
解説

頂点 A を通り，辺 CD に平行な直線と辺 BC の交点を E とすると

$\mathrm{AE}=\mathrm{DC}=\sqrt{7}$

$\mathrm{EC}=\mathrm{AD}=1$

$\mathrm{BE}=3$




△ABE において，余弦定理により

$\cos\angle\mathrm{B}=\dfrac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 2\cdot 3}=\dfrac{1}{2}$

よって　　$\angle\mathrm{B}=60^\circ$

台形 ABCD の高さは　　$\mathrm{AB}\sin 60^\circ=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

したがって　　$S=\dfrac{1}{2}\times(1+4)\times\sqrt{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

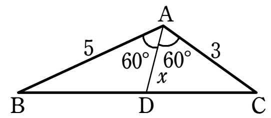
７．△ABC において，AB＝5，AC＝3，$A=120^\circ$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。　　解答　$\dfrac{15}{8}$

解説

三角形の面積について

△ABC＝△ABD＋△ACD

よって，AD＝$x$ とおくと




$\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\sin 120^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot x\sin 60^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot x\sin 60^\circ$

$\sin 120^\circ=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから　　$15=5x+3x$

したがって　　$x=\dfrac{15}{8}$　　　　すなわち　　$\mathrm{AD}=\dfrac{15}{8}$

８．△ABC において，次の等式が成り立つことを示せ。$(a^2+b^2)\sin C=c(a\sin A+b\sin B)$

解説

△ABC の外接円の半径を $R$ とすると，正弦定理により

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

よって　　$(a^2+b^2)\sin C=(a^2+b^2)\cdot\dfrac{c}{2R}=\dfrac{c(a^2+b^2)}{2R}$

$c(a\sin A+b\sin B)=c\left(a\cdot\dfrac{a}{2R}+b\cdot\dfrac{b}{2R}\right)=\dfrac{c(a^2+b^2)}{2R}$

ゆえに　　$(a^2+b^2)\sin C=c(a\sin A+b\sin B)$

９．△ABC において，等式 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$ が成り立つとき，この三角形はどのような形をしているか。

解答　$a=b$ の二等辺三角形 または $C=90^\circ$ の直角三角形

解説

△ABC の外接円の半径を $R$ とする。

正弦定理，余弦定理により

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

したがって，与式は　　$\dfrac{a}{2R}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

両辺に $4abcR$ を掛けると

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

展開して整理すると　　$a^4-b^4-a^2c^2+b^2c^2=0$

よって　　$(a^2+b^2)(a^2-b^2)-c^2(a^2-b^2)=0$

すなわち　　$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$

ゆえに　　$a^2-b^2=0$ または $a^2+b^2-c^2=0$

したがって　$a=b$ または $a^2+b^2=c^2$

よって，△ABC は

$a=b$ の二等辺三角形 または $C=90^\circ$ の直角三角形

10. $a=4$，$b=5$，$c=6$ である△ABCにおいて，内接円の半径 $r$ を求めよ。　**解答** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

**解説**

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}=\dfrac{3}{4}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

△ABCの面積を $S$ とすると　$S=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

また　$S=\dfrac{1}{2}r(4+5+6)=\dfrac{15}{2}r$　　よって，$\dfrac{15}{2}r=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$ から　$r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

**参考**　△ABCの面積はヘロンの公式から求めてもよい。

$s=\dfrac{1}{2}(4+5+6)=\dfrac{15}{2}$，　$S=\sqrt{\dfrac{15}{2}\cdot\left(\dfrac{15}{2}-4\right)\cdot\left(\dfrac{15}{2}-5\right)\cdot\left(\dfrac{15}{2}-6\right)}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

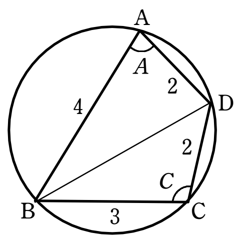
11. 円に内接する四角形ABCDにおいて，AB＝4，BC＝3，CD＝2，DA＝2 のとき，次のものを求めよ。

(1)　$\cos A$ の値　　(2)　BD の長さ

(3)　円の半径 $R$　　(4)　四角形ABCDの面積 $S$

**解答**　(1)　$\dfrac{1}{4}$　　(2)　4　　(3)　$\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$　　(4)　$\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

**解説**




(1)(2)　△ABDに余弦定理を使うと

$\mathrm{BD}^2=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cos A$

$=20-16\cos A$　……①

四角形ABCDは円に内接するから　$C=180°-A$

△BCDに余弦定理を使うと

$\mathrm{BD}^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos(180°-A)$

$=13+12\cos A$　……②

①，② から　$20-16\cos A=13+12\cos A$

整理して　$28\cos A=7$

ゆえに　$\cos A=\dfrac{1}{4}$　……③

①，③ から　$\mathrm{BD}^2=20-16\cdot\dfrac{1}{4}=16$　　BD＞0 であるから　$\mathrm{BD}=\sqrt{16}=4$

(3)　△ABDに正弦定理を使うと　$\dfrac{\mathrm{BD}}{\sin A}=2R$

ゆえに　$R=\dfrac{\mathrm{BD}}{2\sin A}=\dfrac{4}{2\sin A}=\dfrac{2}{\sin A}$

$\sin A>0$ であるから，③ より

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって　$R=2\cdot\dfrac{4}{\sqrt{15}}=\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$

(4)　$S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot2\sin A+\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin C$

$=4\sin A+3\sin C$

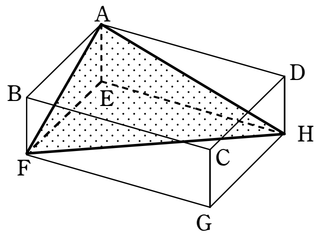
$\sin C=\sin(180°-A)=\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ であるから

$S=4\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}+3\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

12. 右の図のような直方体ABCD−EFGHにおいて，$\mathrm{AE}=\sqrt{10}$，AF＝8，AH＝10 とする。

(1)　△AFHの面積を求めよ。

(2)　点Eから△AFHに下ろした垂線EPの長さを求めよ。




**解答**　(1)　$15\sqrt{7}$　　(2)　$\dfrac{3\sqrt{42}}{7}$

**解説**

(1)　三平方の定理により

$\mathrm{EF}=\sqrt{\mathrm{AF}^2-\mathrm{AE}^2}=\sqrt{8^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

$\mathrm{EH}=\sqrt{\mathrm{AH}^2-\mathrm{AE}^2}=\sqrt{10^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

よって　$\mathrm{FH}=\sqrt{\mathrm{EF}^2+\mathrm{EH}^2}=\sqrt{(3\sqrt{6})^2+(3\sqrt{10})^2}=3\sqrt{16}=12$

△AFHに余弦定理を使うと

$\cos\angle\mathrm{FAH}=\dfrac{\mathrm{AF}^2+\mathrm{AH}^2-\mathrm{FH}^2}{2\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AH}}=\dfrac{8^2+10^2-12^2}{2\cdot8\cdot10}=\dfrac{1}{8}$

$\sin\angle\mathrm{FAH}>0$ であるから

$\sin\angle\mathrm{FAH}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{FAH}}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

よって　$\triangle\mathrm{AFH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AH}\sin\angle\mathrm{FAH}=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot10\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{8}=15\sqrt{7}$

(2)　四面体AEFHの体積を $V$ とすると

$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{FHE}\times\mathrm{AE}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EH}\right)\cdot\mathrm{AE}$

$=\dfrac{1}{6}\cdot3\sqrt{6}\cdot3\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=15\sqrt{6}$

また，四面体AEFHについて，△AFHを底面としてみると

$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{AFH}\times\mathrm{EP}$

EP＝$x$ とおくと　$V=\dfrac{1}{3}\times15\sqrt{7}\times x=5\sqrt{7}\,x$

よって　$15\sqrt{6}=5\sqrt{7}\,x$

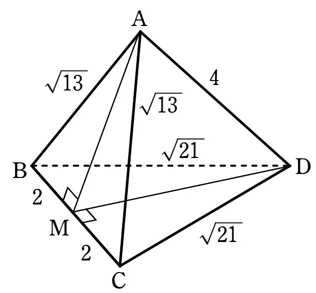
したがって　$x=\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{42}}{7}$

13. 四面体ABCDにおいて，AD＝BC＝4，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\sqrt{13}$，$\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=\sqrt{21}$ である。BCの中点をMとするとき，次のものを求めよ。

(1)　△AMDの面積 $S$　　(2)　四面体ABCDの体積 $V$

**解答**　(1)　$4\sqrt{2}$　　(2)　$\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

**解説**




(1)　AB＝AC から　∠AMB＝90°

よって　$\mathrm{AM}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-2^2}=\sqrt{9}=3$

また，BD＝CD から　∠DMB＝90°

よって　$\mathrm{DM}=\sqrt{(\sqrt{21})^2-2^2}=\sqrt{17}$

△AMDに余弦定理を使うと

$\cos\angle\mathrm{MAD}=\dfrac{3^2+4^2-(\sqrt{17})^2}{2\cdot3\cdot4}=\dfrac{1}{3}$

$\sin\angle\mathrm{MAD}>0$ であるから

$\sin\angle\mathrm{MAD}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$

(2)　AM⊥BC，DM⊥BC から　平面AMD⊥BC

よって　$V$＝(三角錐BAMD)＋(三角錐CAMD)

$=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot2+\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot2=\dfrac{4}{3}S=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

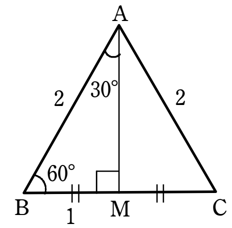
14. すべての辺の長さが2である正四角錐A−BCDEに球が内接している。

(1)　辺BCの中点をMとするとき，AMの長さを求めよ。

(2)　球の半径 $r$，表面積 $S$，体積 $V$ を求めよ。

**解答**　(1)　$\sqrt{3}$　　(2)　$r=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，$S=(8-4\sqrt{3})\pi$，$V=\dfrac{6\sqrt{6}-10\sqrt{2}}{3}\pi$

**解説**



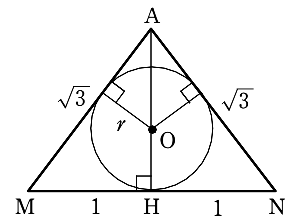

(1)　△ABCは正三角形(二等辺三角形)であるから

∠AMB＝90°

また　BM＝1

したがって

$\mathrm{AM}=\sqrt{3}\,\mathrm{BM}=\sqrt{3}$




(2)　辺DEの中点をN，球の中心をOとする。

球は線分AM，AN上の点で接するから，3点A，M，Nを通る平面で切った断面で考える。

(1)と同様に考えると　$\mathrm{AN}=\sqrt{3}$

AOとMNの交点をHとすると

AH⊥MH，MH＝NH

MN＝CD＝2 から　MH＝NH＝1

△AMHにおいて，三平方の定理により　$\mathrm{AH}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$

△AMNの面積を2通りに表すことにより

$\dfrac{1}{2}r(\mathrm{AM}+\mathrm{MN}+\mathrm{AN})=\dfrac{1}{2}\mathrm{MN}\cdot\mathrm{AH}$

が成り立つから　$\dfrac{1}{2}r(\sqrt{3}+2+\sqrt{3})=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}$

よって　$(1+\sqrt{3})r=\sqrt{2}$

したがって　$r=\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

また，球の表面積は

$S=4\pi r^2=4\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2=4\pi\cdot(2-\sqrt{3})=(8-4\sqrt{3})\pi$

体積は　$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\dfrac{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{6\sqrt{6}-10\sqrt{2}}{3}\pi$

**別解**　($r$ の求め方)

AMと球の接点をTとすると　△AOT∽△AMH

よって　OT：MH＝AO：AM

すなわち　$r:1=(\sqrt{2}-r):\sqrt{3}$

ゆえに　$\sqrt{3}\,r=\sqrt{2}-r$

これを解くと　$r=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

1．△ABC において，$b=2\sqrt{3}$，$c=2$，$C=30^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

解答　$a=4$，$A=90^\circ$，$B=60^\circ$ または $a=2$，$A=30^\circ$，$B=120^\circ$

余弦定理で $a=2, 4$ と求めた後 場合分けをする。

解説

△ABC において，正弦定理により　$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B}=\dfrac{2}{\sin 30^\circ}$

よって　$\sin B=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

これを満たす $B$ は　$B=60^\circ$，$120^\circ$　片方だけの者多し

$B=60^\circ$ のとき

$A=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$

△ABC は $A=90^\circ$ の直角三角形であるから，三平方の定理により

$a=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{16}=4$

sinB=60° という ダメな書き方

$B=120^\circ$ のとき

$A=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

$A=C$ であるから，△ABC は AB＝BC の二等辺三角形である。

したがって　$a=c=2$

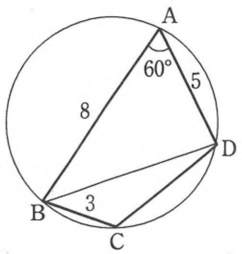
答　$a=4$，$A=90^\circ$，$B=60^\circ$　または　$a=2$，$A=30^\circ$，$B=120^\circ$

2．円に内接する四角形 ABCD において，

$\angle A=60^\circ$，AB＝8，BC＝3，DA＝5 のとき，

次のものを求めよ。

(1)　線分 BD の長さ　　(2)　線分 CD の長さ




解答　(1)　7　　(2)　5

解説

(1)　△ABD に余弦定理を使うと

$BD^2=8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos 60^\circ=64+25-40=49$

BD＞0 であるから　　BD＝7

(2)　円に内接する四角形において，向かい合う角の和は 180° であるから

$\angle BCD=120^\circ$

よって，CD＝$x$ とおいて，△BCD に余弦定理を使うと

$7^2=3^2+x^2-2\cdot 3\cdot x\cos 120^\circ$　←　$7^2=3^2+x^2-2\cdot 3\cdot x\cdot -\frac{1}{2}$　かっこがない

すなわち　　$x^2+3x-40=0$

これを解いて　　$x=5$，$-8$

$x>0$ であるから　　$x=5$

したがって　　CD＝5

3．△ABC において，外接円の半径を $R$ とする。$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$，

$R=\sqrt{15}$ のとき　$a$を求めよ。　解答　$a=\dfrac{15}{4}$

解説

正弦定理により $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ が成り立つから

$a:b:c=2:3:4$

このとき，正の数 $k$ を用いて $a=2k$，$b=3k$，$c=4k$ と表すことができる。

a=2 としている者が多い

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\cdot 3k\cdot 4k}=\dfrac{21k^2}{24k^2}=\dfrac{7}{8}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{8}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A}=2R$

したがって　$a=2R\sin A=2\cdot\sqrt{15}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{8}=\dfrac{15}{4}$

4．△ABC において，$\dfrac{\sin A}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sin B}{2}=\dfrac{\sin C}{\sqrt{2}}$ が成り立つとき，この三角形の最小の角の大きさを求めよ。　解答　$C=30^\circ$

解説

$\dfrac{\sin A}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sin B}{2}=\dfrac{\sin C}{\sqrt{2}}$ から　これができない

$\sin A:\sin B:\sin C=(1+\sqrt{3}):2:\sqrt{2}$

$a:b:c=1+\sqrt{3}:2:\sqrt{2}$　かっこがない

正弦定理により $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ が成り立つから

$a:b:c=(1+\sqrt{3}):2:\sqrt{2}$

このとき，正の数 $k$ を用いて $a=(1+\sqrt{3})k$，$b=2k$，$c=\sqrt{2}k$ と表すことができる。

$c$ が最小の辺であるから，$C$ が最小の角である。

余弦定理により

$$\cos C=\frac{\{(1+\sqrt{3})k\}^2+(2k)^2-(\sqrt{2}k)^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})k\cdot 2k}=\frac{2(3+\sqrt{3})k^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})k\cdot 2k}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，最小の角の大きさは　　$C=30^\circ$

5．$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ とする。等式 $2\cos^2\theta-\sin\theta-1=0$ を満たす $\theta$ を求めよ。

sinθ 1種類にして 2次方程式を作ることができない。

解答　$\theta=30^\circ$，$150^\circ$

解説

$2\cos^2\theta-\sin\theta-1=0$ から　　$2(1-\sin^2\theta)-\sin\theta-1=0$

よって　　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

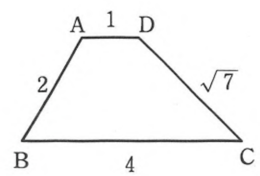
$\sin\theta=t$ とおくと　　$2t^2+t-1=0$

左辺を因数分解すると　　$(t+1)(2t-1)=0$　　したがって　　$t=-1$，$\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より $0\leqq t\leqq 1$ であるから　　$t=\dfrac{1}{2}$

すなわち　　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　　よって　　$\theta=30^\circ$，$150^\circ$

6．台形 ABCD において，AD∥BC，AB＝2，BC＝4，CD＝$\sqrt{7}$，DA＝1 のとき，この台形の面積 $S$ を求めよ。




解答　$\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

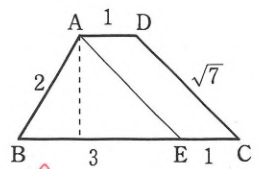
解説

頂点 A を通り，辺 CD に平行な直線と辺 BC の交点を E とすると

AE＝DC＝$\sqrt{7}$

EC＝AD＝1

BE＝3




ここを1と決めつけて いる者が多い。

△ABE において，余弦定理により

$\cos\angle B=\dfrac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 2\cdot 3}=\dfrac{1}{2}$

よって　　$\angle B=60^\circ$

台形 ABCD の高さは　　$AB\sin 60^\circ=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

したがって　　$S=\dfrac{1}{2}\times(1+4)\times\sqrt{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

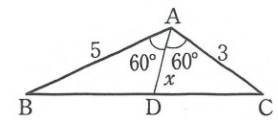
7．△ABC において，AB＝5，AC＝3，$A=120^\circ$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。　解答　$\dfrac{15}{8}$

解説

三角形の面積について

△ABC＝△ABD＋△ACD

よって，AD＝$x$ とおくと




$\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\sin 120^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot x\sin 60^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot x\sin 60^\circ$

$\sin 120^\circ=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから　　$15=5x+3x$

したがって　　$x=\dfrac{15}{8}$　　すなわち　　AD＝$\dfrac{15}{8}$

8．△ABC において，次の等式が成り立つことを示せ。$(a^2+b^2)\sin C=c(a\sin A+b\sin B)$

(左辺)(右辺) それぞれ計算 していない者多し

解説

△ABC の外接円の半径を $R$ とすると，正弦定理により

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

よって　　$(a^2+b^2)\sin C=(a^2+b^2)\cdot\dfrac{c}{2R}=\dfrac{c(a^2+b^2)}{2R}$

$c(a\sin A+b\sin B)=c\left(a\cdot\dfrac{a}{2R}+b\cdot\dfrac{b}{2R}\right)=\dfrac{c(a^2+b^2)}{2R}$

ゆえに　　$(a^2+b^2)\sin C=c(a\sin A+b\sin B)$

9．△ABC において，等式 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$ が成り立つとき，この三角形はどのような形をしているか。

解答　$a=b$ の二等辺三角形 または $C=90^\circ$ の直角三角形

解説

△ABC の外接円の半径を $R$ とする。

正弦定理，余弦定理により

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

したがって，与式は　　$\dfrac{a}{2R}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

両辺に $4abcR$ を掛けると

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

展開して整理すると　　$a^4-b^4-a^2c^2+b^2c^2=0$

よって　　$(a^2+b^2)(a^2-b^2)-c^2(a^2-b^2)=0$

すなわち　　$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$

ゆえに　　$a^2-b^2=0$　または　$a^2+b^2-c^2=0$

したがって　　$a=b$　または　$a^2+b^2=c^2$

よって，△ABC は

$a=b$ の二等辺三角形　または　$C=90^\circ$ の直角三角形

10. $a=4$，$b=5$，$c=6$ である△ABCにおいて，内接円の半径 $r$ を求めよ。　**解答** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

**解説**

外接円の半径と問題違ってる

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}=\dfrac{3}{4}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

△ABCの面積を $S$ とすると　$S=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

また　$S=\dfrac{1}{2}r(4+5+6)=\dfrac{15}{2}r$　よって，$\dfrac{15}{2}r=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$ から　$r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

**参考** △ABCの面積はヘロンの公式から求めてもよい。

$s=\dfrac{1}{2}(4+5+6)=\dfrac{15}{2}$，　$S=\sqrt{\dfrac{15}{2}\cdot\left(\dfrac{15}{2}-4\right)\cdot\left(\dfrac{15}{2}-5\right)\cdot\left(\dfrac{15}{2}-6\right)}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

11. 円に内接する四角形ABCDにおいて，AB$=4$，BC$=3$，CD$=2$，DA$=2$ のとき，次のものを求めよ。

(1) $\cos A$ の値　　(2) BDの長さ

(3) 円の半径 $R$　　(4) 四角形ABCDの面積 $S$

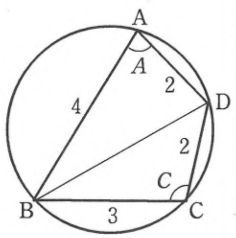
**解答** (1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $4$　(3) $\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$　(4) $\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

**解説**

(1)(2) △ABDに余弦定理を使うと

$\mathrm{BD}^2=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cos A$

$=20-16\cos A$　……①




四角形ABCDは円に内接するから　$C=180^\circ-A$

△BCDに余弦定理を使うと

$\mathrm{BD}^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos(180^\circ-A)$

$=13+12\cos A$　……②

これができない

①，②から　$20-16\cos A=13+12\cos A$

整理して　$28\cos A=7$

$\cos(180^\circ-A)=-\cos A$

ゆえに　$\cos A=\dfrac{1}{4}$　……③

①，③から　$\mathrm{BD}^2=20-16\cdot\dfrac{1}{4}=16$　BD$>0$ であるから　BD$=\sqrt{16}=4$

(3) △ABDに正弦定理を使うと　$\dfrac{\mathrm{BD}}{\sin A}=2R$

ゆえに　$R=\dfrac{\mathrm{BD}}{2\sin A}=\dfrac{4}{2\sin A}=\dfrac{2}{\sin A}$

$\sin A>0$ であるから，③より

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって　$R=2\cdot\dfrac{4}{\sqrt{15}}=\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$

(4) $S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot2\sin A+\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin C$

$=4\sin A+3\sin C$

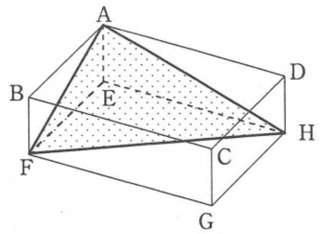
$\sin C=\sin(180^\circ-A)=\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ であるから

$S=4\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}+3\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

12. 右の図のような直方体ABCD−EFGHにおいて，AE$=\sqrt{10}$，AF$=8$，AH$=10$ とする。

(1) △AFHの面積を求めよ。

(2) 点Eから△AFHに下ろした垂線EPの長さを求めよ。




**解答** (1) $15\sqrt{7}$　(2) $\dfrac{3\sqrt{42}}{7}$

**解説**

(1) 三平方の定理により

$\mathrm{EF}=\sqrt{\mathrm{AF}^2-\mathrm{AE}^2}=\sqrt{8^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

$\mathrm{EH}=\sqrt{\mathrm{AH}^2-\mathrm{AE}^2}=\sqrt{10^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

よって　$\mathrm{FH}=\sqrt{\mathrm{EF}^2+\mathrm{EH}^2}=\sqrt{(3\sqrt{6})^2+(3\sqrt{10})^2}=3\sqrt{16}=12$

△AFHに余弦定理を使うと

$\cos\angle\mathrm{FAH}=\dfrac{\mathrm{AF}^2+\mathrm{AH}^2-\mathrm{FH}^2}{2\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AH}}=\dfrac{8^2+10^2-12^2}{2\cdot8\cdot10}=\dfrac{1}{8}$

$\sin\angle\mathrm{FAH}>0$ であるから

$\sin\angle\mathrm{FAH}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{FAH}}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

よって　$\triangle\mathrm{AFH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AH}\sin\angle\mathrm{FAH}=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot10\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{8}=15\sqrt{7}$

(2) 四面体AEFHの体積を $V$ とすると

$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{FHE}\times\mathrm{AE}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EH}\right)\cdot\mathrm{AE}$

$=\dfrac{1}{6}\cdot3\sqrt{6}\cdot3\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=15\sqrt{6}$

また，四面体AEFHについて，△AFHを底面としてみると

$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{AFH}\times\mathrm{EP}$

EP$=x$ とおくと　$V=\dfrac{1}{3}\times15\sqrt{7}\times x=5\sqrt{7}\,x$

よって　$15\sqrt{6}=5\sqrt{7}\,x$

したがって　$x=\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{42}}{7}$

13. 四面体ABCDにおいて，AD$=$BC$=4$，AB$=$AC$=\sqrt{13}$，BD$=$CD$=\sqrt{21}$ である。BCの中点をMとするとき，次のものを求めよ。

(1) △AMDの面積 $S$　　(2) 四面体ABCDの体積 $V$

**解答** (1) $4\sqrt{2}$　(2) $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

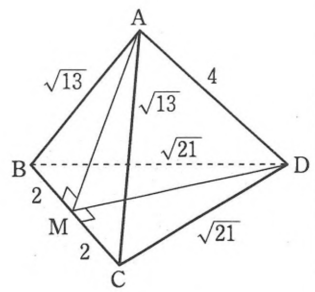
**解説**

(1) AB$=$AC から　$\angle\mathrm{AMB}=90^\circ$

よって　$\mathrm{AM}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-2^2}=\sqrt{9}=3$

また，BD$=$CD から　$\angle\mathrm{DMB}=90^\circ$

よって　$\mathrm{DM}=\sqrt{(\sqrt{21})^2-2^2}=\sqrt{17}$




△AMDに余弦定理を使うと

$\cos\angle\mathrm{MAD}=\dfrac{3^2+4^2-(\sqrt{17})^2}{2\cdot3\cdot4}=\dfrac{1}{3}$

$\sin\angle\mathrm{MAD}>0$ であるから

$\sin\angle\mathrm{MAD}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$

(2) AM⊥BC，DM⊥BC から　平面AMD⊥BC

よって　$V=$(三角錐BAMD)$+$(三角錐CAMD)

$=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot2+\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot2=\dfrac{4}{3}S=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

14. すべての辺の長さが2である正四角錐A−BCDEに球が内接している。

(1) 辺BCの中点をMとするとき，AMの長さを求めよ。

(2) 球の半径 $r$，表面積 $S$，体積 $V$ を求めよ。

**解答** (1) $\sqrt{3}$　(2) $r=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，$S=(8-4\sqrt{3})\pi$，$V=\dfrac{6\sqrt{6}-10\sqrt{2}}{3}\pi$

**解説**

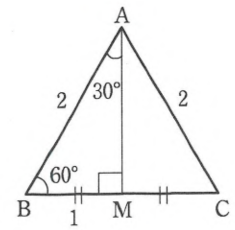
(1) △ABCは正三角形(二等辺三角形)であるから

$\angle\mathrm{AMB}=90^\circ$

また　BM$=1$

したがって

$\mathrm{AM}=\sqrt{3}\,\mathrm{BM}=\sqrt{3}$




(2) 辺DEの中点をN，球の中心をOとする。

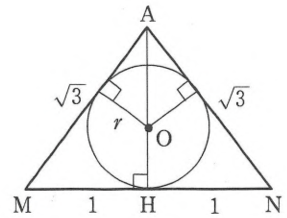
球は線分AM，AN上の点で接するから，3点A，M，Nを通る平面で切った断面で考える。

(1)と同様に考えると　AN$=\sqrt{3}$

AOとMNの交点をHとすると

AH⊥MH，MH$=$NH

MN$=$CD$=2$ から　MH$=$NH$=1$




△AMHにおいて，三平方の定理により　$\mathrm{AH}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$

△AMNの面積を2通りに表すことにより

$\dfrac{1}{2}r(\mathrm{AM}+\mathrm{MN}+\mathrm{AN})=\dfrac{1}{2}\mathrm{MN}\cdot\mathrm{AH}$

別解あり

が成り立つから　$\dfrac{1}{2}r(\sqrt{3}+2+\sqrt{3})=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}$

A−BCDEの体積

よって　$(1+\sqrt{3})r=\sqrt{2}$

したがって　$r=\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$=$ (三角錐)$\times4$ $+$ (四角錐)

また，球の表面積は

$S=4\pi r^2=4\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2=4\pi\cdot(2-\sqrt{3})=(8-4\sqrt{3})\pi$

体積は　$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\dfrac{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{6\sqrt{6}-10\sqrt{2}}{3}\pi$

**別解** ($r$ の求め方)

AMと球の接点をTとすると　△AOT∽△AMH

よって　OT : MH$=$AO : AM

すなわち　$r:1=(\sqrt{2}-r):\sqrt{3}$

ゆえに　$\sqrt{3}r=\sqrt{2}-r$

これを解くと　$r=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$