

[1] 次の2次方程式を解け。

(1) $\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{1}{3}$

(2) $9x^2 + 6\sqrt{2}x + 2 = 0$

[2] 次の2次不等式を解け。

(1) $3x - x^2 \geq 0$

(2) $x^2 > 5$

(3) $3x^2 + x - 3 \leq 0$

(4) $x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0$

(5) $-x^2 + 10x - 25 < 0$

(6) $3x^2 - 12x + 14 \geq 0$

[3] 2次方程式 $mx^2 - 4mx + 2m + 4 = 0$ が重解をもつように、定数 m の値を定めよ。また、そのときの重解を求めよ。[4] 2つの2次方程式 $x^2 + mx + m = 0$ ……①, $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ ……②がある。①, ②の少なくとも一方が実数解をもつように、それぞれ定数 m の値の範囲を定めよ。[5] 連立不等式「 $1 \leq x^2 + x < 2$ 」を解け。[6] 放物線 $y = -x^2 + 3x - 3$ と直線 $y = x + k$ の共有点の個数は、定数 k の値によってどのように変わるか。

7 すべての実数 x に対して、不等式 $ax^2 - 4x + a + 3 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

8 2 次関数 $y = x^2 + 2mx + 2m + 3$ のグラフが x 軸の $x < 0$ の部分と、異なる 2 点で交わる時、定数 m の値の範囲を求めよ。

9 2 次不等式 $x^2 - 1 \leq 0$ を満たすすべての実数 x に対し、常に 2 次不等式 $x^2 - 2ax + a + 2 > 0$ が成り立つとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

10 2 つの 2 次不等式 $2x^2 + 3x - 2 > 0$ …… ①, $x^2 - (a + 3)x + 3a < 0$ …… ② を考える。
ただし、 a は定数とする。
(1) 2 次不等式 ① を解け。
(2) 2 次不等式 ② を解け。
(3) 2 つの 2 次不等式 ①, ② を同時に満たす整数 x がちょうど 2 つ存在する a の値の範囲を求めよ。

1 次の2次方程式を解け。

(1) $\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{1}{3} \times 6$

$3x^2 = 6x + 2$

$3x^2 - 6x - 2 = 0$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$

$= \frac{6 \pm 2\sqrt{15}}{2 \cdot 3}$ $\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{3}$

2 次の2次不等式を解け。

(1) $3x - x^2 \geq 0$

$x^2 - 3x \leq 0$

$x(x-3) \leq 0$

$0 \leq x \leq 3$

(3) $3x^2 + x - 3 \leq 0$

$3x^2 + x - 3 = 0$ とおく。

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{6}$

$\frac{-1 - \sqrt{37}}{6} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{37}}{6}$

(5) $-x^2 + 10x - 25 < 0$

$x^2 - 10x + 25 > 0$

$(x-5)^2 > 0$

5以外
すべての実数

(2) $9x^2 + 6\sqrt{2}x + 2 = 0$

$(3x + \sqrt{2})^2 = 0$

$x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

(2) $x^2 > 5$

$x^2 - 5 > 0$

$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) > 0$

$x < -\sqrt{5}, \sqrt{5} < x$

(4) $x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0$

$(x - \frac{1}{2})^2 \leq 0$

$x = \frac{1}{2}$

$x \leq \frac{1}{2}$ など

(6) $3x^2 - 12x + 14 \geq 0$

$3x^2 - 12x + 14 = 0$ とおく。

$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 3 \cdot 14}}{2 \cdot 3}$

$2 \cdot 3$

判別式 $\Delta < 0$ である。

すべての実数

3 2次方程式 $mx^2 - 4mx + 2m + 4 = 0$ が重解をもつように、定数 m の値を定めよ。また、そのときの重解を求めよ。

2次方程式だから

解の公式を用いて。

$m \neq 0$ ① ②

$x = \frac{-(-4m)}{2 \cdot m}$

判別式 Δ とすると

$\Delta = (-4m)^2 - 4 \cdot m \cdot (2m + 4)$

$= 16m^2 - 8m^2 - 16m$

$= 8m^2 - 16m$

$= 8m(m - 2)$

重解をもつから

$\Delta = 0$ とおく。

$8m(m - 2) = 0$

① $m = 2$

4 2つの2次方程式 $x^2 + mx + m = 0$ ①, $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ ② がある。①, ②の少なくとも一方が実数解をもつように、それぞれ定数 m の値の範囲を定めよ。

①の判別式 Δ_1 とすると

$\Delta_2 = (-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 6)$

$= 4m^2 - 4m - 24$

$= 4(m^2 - m - 6)$

$= 4(m + 2)(m - 3)$

同様に② $\Delta_2 \geq 0$

$4(m + 2)(m - 3) \geq 0$

$\Delta_1 = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot m$

$= m(m - 4)$

実数解をもつから

$\Delta_1 \geq 0$

$m(m - 4) \geq 0$

$m \leq 0, 4 \leq m$

②の判別式 Δ_2 とすると

$\Delta_2 \geq 0$

$m \leq 0, 3 \leq m$

$m(m - 4) \geq 0$
 $\rightarrow m - 4 \geq 0$
 $\rightarrow m \geq 4$

5 連立不等式 $1 \leq x^2 + x < 2$ を解け。

$\begin{cases} x^2 + x \geq 1 & \text{--- ①} \\ x^2 + x < 2 & \text{--- ②} \end{cases}$

① $x^2 + x - 1 \geq 0$

$x^2 + x - 1 = 0$ とおく。

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1)}}{2}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

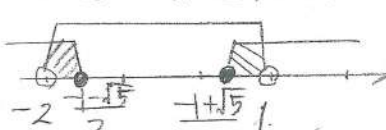
$x \leq \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \leq x$

② $x^2 + x - 2 < 0$

$(x - 1)(x + 2) < 0$

$-2 < x < 1$

①②の共通範囲



$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \leq x < 1$

$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$

$2 < \sqrt{5} < 3$

$1 < -1 + \sqrt{5} < 2$

$\frac{1}{2} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$

$-2 > -\sqrt{5} > -3$

$-3 > -1 - \sqrt{5} > -4$

$-\frac{3}{2} > \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} > -2$

6 放物線 $y = -x^2 + 3x - 3$ と直線 $y = x + k$ の共有点の個数は、定数 k の値によってどのように変わるか。

$\begin{cases} y = -x^2 + 3x - 3 & \text{--- ①} \\ y = x + k & \text{--- ②} \end{cases}$

①と②を連立して

$x + k = -x^2 + 3x - 3$

$x^2 - 2x + k + 3 = 0$

判別式 Δ とすると

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k + 3)$

$= 4 - 4k - 12$

$= -4k - 8$

$= -4(k + 2)$

(i) $\Delta > 0$ のとき、つまり

$-4(k + 2) > 0$

$k + 2 < 0$

$k < -2$ のとき

共有点 2 点

(ii) $\Delta = 0$ のとき、つまり

$k = -2$ のとき

共有点 1 点

(iii) $\Delta < 0$ のとき、つまり

$k > -2$ のとき

共有点 0 点

7 すべての実数 x に対して、不等式 $ax^2 - 4x + a + 3 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

$y = ax^2 - 4x + a + 3$
 $\Delta = -4a^2 - 12a + 16$
 $= -4(a^2 + 3a - 4)$
 $= -4(a-1)(a+4)$
 $\Delta < 0$ とすれば良い。
 $(a-1)(a+4) < 0$
 $a < -4, 1 < a$

(i) x^2 の係数
 $a > 0$ — ①
 $\Delta < 0$ とすれば良い。
 $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot a \cdot (a+3)$

8 2次関数 $y = x^2 + 2mx + 2m + 3$ のグラフが x 軸の $x < 0$ の部分と、異なる2点で交わる時、定数 m の値の範囲を求めよ。

(i) 異なる2点で交わるから判別式 $\Delta > 0$
 $\Delta = (2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m+3)$
 $= 4(m^2 - 2m - 3)$
 $= 4(m+1)(m-3)$
 $4(m+1)(m-3) > 0$
 $m < -1, 3 < m$

(ii) $y = (x+m)^2 - m^2 + 2m + 3$
 $x < 0$ の部分で交わるから
 $x = -m < 0$
 $m > 0$ — ③
 $m > 3$ — ⑧

9 2次不等式 $x^2 - 1 \leq 0$ を満たすすべての実数 x に対し、常に2次不等式 $x^2 - 2ax + a + 2 > 0$ が成り立つとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

$x^2 - 1 \leq 0$ $x \leq -1$ または $x \geq 1$
 $(x+1)(x-1) \leq 0$
 $-1 \leq x \leq 1$
 $x = a$ とき
 $-a^2 + a + 2 > 0$
 $a^2 - a - 2 < 0$
 $(a-2)(a+1) < 0$
 $-1 < a < 2$

(*) における最小値が0より大きければ良い。
 $(iii) a > 1$ とき — ⑤
 $(i) a < -1$ とき — ①
 $x = -1$ とき
 $y = 1 - 2a + a + 2 = -a + 3$
 $-a + 3 > 0$
 $a < 3$ — ⑥
 $1 < a < 3$ — ②

(ii) $a < -1$ とき — ①
 $x = 1$ とき
 $y = 1 - 2a + a + 2 = -a + 3$
 $-a + 3 > 0$
 $a < 3$ — ⑥
 $1 < a < 3$ — ②
 $(i) \sim (iii)$ を合わせて
 $-1 < a < 3$

判別式 $\Delta < 0$ ならば、 $x < 0$ の部分で交わるから
 $x = -m < 0$
 $m > 0$ — ③
 $m > 3$ — ⑧
 $-1 < a < 3$

10 2つの2次不等式 $2x^2 + 3x - 2 > 0$ …… ①, $x^2 - (a+3)x + 3a < 0$ …… ② を考える。ただし、 a は定数とする。

(1) 2次不等式①を解け。
 $(2) 2次不等式②を解け。$
 $(3) 2つの2次不等式①, ②を同時に満たす整数 x がちょうど2つ存在する a の値の範囲を求めよ。$

(i) $(2x-1)(x+2) > 0$
 $x < -2, \frac{1}{2} < x$
 $(ii) a = 3$ とき
 $x^2 - 6x + 9 < 0$
 $(x-3)^2 < 0$
 $x = 3$ のみ解
 $(iii) a > 3$ とき — ⑤

(i) $a < 3$ とき
 $x = 4, 5$ を含め
 $x = 6$ を含めない
 $4 < a \leq 6$ — ④
 $(ii) a = 3$ とき
 $x = 4, 5$ を含め
 $x = 6$ を含めない
 $4 < a \leq 6$ — ④
 $(iii) a > 3$ とき
 $x = 4, 5$ を含め
 $x = 6$ を含めない
 $4 < a \leq 6$ — ④

(3) (i) $a < 3$ とき — ③
 $-3 \leq a < 1$
 $5 < a \leq 6$ — ④
 $x = 1, 2$ を含め
 $x = -3$ を含めない
 $-3 \leq a < 1$ — ④
 $(ii) a = 3$ とき
 $x = 4, 5$ を含め
 $x = 6$ を含めない
 $4 < a \leq 6$ — ④
 $(iii) a > 3$ とき
 $x = 4, 5$ を含め
 $x = 6$ を含めない
 $4 < a \leq 6$ — ④