数学演習（２次方程式･２次不等式）Ｒ２．９．１９　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2=5x$　　(2) $25x^2-9=0$

(3) $(x-1)^2=2$　　(4) $x^2-5x+8=0$

(5) $x^2-\frac{7}{6}x-\frac{1}{2}=0$　　(6) $20x-25-4x^2=0$

(7) $(x+6)(x-1)=x(7-3x)$　　(8) $(x+2)^2-5(x+2)+5=0$

(9) $1.5x(2-0.5x)=0.5x+2$　　(10) $x^2-5\sqrt{3}\,x+18=0$

$\boxed{2}$ 2 次方程式 $x^2+mx+m+3=0$ が重解をもつとき，定数 m の値を求めよ。また，そのときの重解を求めよ。

$\boxed{3}$ x の 2 次方程式 $x^2+2x+m=0$ の実数解の個数を求めよ。

$\boxed{4}$ 2 次関数のグラフ $y=x^2-4x+1$ と x 軸の共有点の座標を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(1) $y=x^2+5x+8$　　(2) $y=2x^2-6x+3$　　(3) $y=3x^2+6x+3$

$\boxed{6}$ 放物線 $y=x^2+5x+3$ と直線 $y=-x-6$ に共有点があれば，その座標を求めよ。

$\boxed{7}$ 放物線 $y=x^2-4x+3$ と直線 $y=2x+k$ が接するとき，定数 k の値を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

$\boxed{8}$ 2 次不等式 $-2x^2+ax+b>0$ の解が $-1<x<2$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{9}$ 次の 2 次不等式を解け。

(1) $7x-13-x^2 \leqq 0$　(2) $12(x-3)<x^2$　(3) $-x(3x-4)>7$

(4) $6(x^2-1)>5x$　(5) $3x^2+x \geqq 2x^2+1$　(6) $x^2+2\sqrt{6}\,x \leqq -6$

$\boxed{10}$ 次の不等式を解け。　$-8<x^2-6x \leqq 0$

$\boxed{11}$ 2 次方程式 $x^2+(m-1)x+2m-1=0$ が実数解をもたないように，定数 m の値の範囲を定めよ。

$\boxed{12}$ 2 つの 2 次関数 $y=x^2+2mx+m+2$，$y=x^2+mx+m$ のグラフがともに x 軸と共有点をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

$\boxed{13}$ 2 次不等式 $ax^2+2x+a<0$ の解がすべての実数であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{14}$ x についての不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$，$3x^2+2x-1>0$ を同時に満たす整数 x がちょうど 3 つ存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{15}$ 2 次関数 $y=x^2-2mx+m+2$ のグラフが x 軸の $x>1$ の部分と，異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

数学演習（２次方程式･２次不等式）Ｒ２．９．１９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1 次の２次方程式を解け。

(1) $x^2=5x$　　(2) $25x^2-9=0$

(3) $(x-1)^2=2$　　(4) $x^2-5x+8=0$

(5) $x^2-\dfrac{7}{6}x-\dfrac{1}{2}=0$　　(6) $20x-25-4x^2=0$

(7) $(x+6)(x-1)=x(7-3x)$　　(8) $(x+2)^2-5(x+2)+5=0$

(9) $1.5x(2-0.5x)=0.5x+2$　　(10) $x^2-5\sqrt{3}\,x+18=0$

解答　(1) $x=0,\ 5$　(2) $x=\pm\dfrac{3}{5}$　(3) $x=1\pm\sqrt{2}$　(4) 実数解をもたない

(5) $x=\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{3}$　(6) $x=\dfrac{5}{2}$　(7) $x=-1,\ \dfrac{3}{2}$　(8) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(9) $x=2,\ \dfrac{4}{3}$　(10) $x=2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}$

解説

(1) $x^2-5x=0$ より $x(x-5)=0$ から　$x=0$ または $x-5=0$

したがって　$x=0,\ 5$

(2) $25x^2=9$ から　$x^2=\dfrac{9}{25}$　よって　$x=\pm\sqrt{\dfrac{9}{25}}=\pm\dfrac{3}{5}$

(3) $(x-1)^2=2$ から　$x-1=\pm\sqrt{2}$　よって　$x=1\pm\sqrt{2}$

(4) 解の公式より　$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}$　根号内が負になるので

この２次方程式は実数解をもたない

(5) 両辺に６を掛けて　$6x^2-7x-3=0$　左辺を因数分解して　$(2x-3)(3x+1)=0$

よって　$2x-3=0$ または $3x+1=0$　したがって　$x=\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{3}$

(6) 両辺に -1 を掛けて，整理すると　$4x^2-20x+25=0$

左辺を因数分解して　$(2x-5)^2=0$　すなわち　$2x-5=0$　よって　$x=\dfrac{5}{2}$

(7) 両辺を展開して　$x^2+5x-6=7x-3x^2$　整理すると　$4x^2-2x-6=0$

両辺を２で割って　$2x^2-x-3=0$　左辺を因数分解して　$(x+1)(2x-3)=0$

よって　$x+1=0$ または $2x-3=0$　したがって　$x=-1,\ \dfrac{3}{2}$

(8) $x+2=X$ とおくと　$X^2-5X+5=0$

解の公式により

$$X=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\quad よって\quad x+2=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

したがって　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}-2=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

別解　左辺を展開して整理すると　$x^2-x-1=0$

解の公式により

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

(9) 両辺に100を掛けて　$15x(20-5x)=50x+200$

両辺を５で割って　$3x(20-5x)=10x+40$

両辺を５で割って　$3x(4-x)=2x+8$

展開して整理すると　$3x^2-10x+8=0$

左辺を因数分解して　$(x-2)(3x-4)=0$

よって　$x-2=0$ または $3x-4=0$　したがって　$x=2,\ \dfrac{4}{3}$

参考　最初に両辺に４を掛けてもよい。

(10) 解の公式により

$$x=\frac{-(-5\sqrt{3})\pm\sqrt{(-5\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot18}}{2\cdot1}=\frac{5\sqrt{3}\pm\sqrt{3}}{2}$$

$\dfrac{5\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，$\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ であるから　$x=2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}$

2 ２次方程式 $x^2+mx+m+3=0$ が重解をもつとき，定数 m の値を求めよ。また，そのときの重解を求めよ。

解答　$m=-2$ のとき重解 $x=1$，$m=6$ のとき重解 $x=-3$

解説

この２次方程式の判別式を D とすると

$D=m^2-4\cdot1\cdot(m+3)=m^2-4m-12$

２次方程式が重解をもつのは $D=0$ のときであるから　$m^2-4m-12=0$

すなわち　$(m+2)(m-6)=0$

よって　$m=-2,\ 6$

また，重解は $x=-\dfrac{m}{2}$ であるから

$m=-2$ のとき $x=1$，$m=6$ のとき $x=-3$

3 x の２次方程式 $x^2+2x+m=0$ の実数解の個数を求めよ。

解答　$m<1$ のとき２個，$m=1$ のとき１個，$m>1$ のとき０個

解説

この２次方程式の判別式を D とすると

$D=2^2-4\cdot1\cdot m=4-4m=4(1-m)$

[1] $D>0$ すなわち $m<1$ のとき

実数解の個数は　２個

[2] $D=0$ すなわち $m=1$ のとき

実数解の個数は　１個

[3] $D<0$ すなわち $m>1$ のとき

実数解の個数は　０個

以上から，$m<1$ のとき　２個

$m=1$ のとき　１個

$m>1$ のとき　０個

4 ２次関数のグラフ $y=x^2-4x+1$ と x 軸の共有点の座標を求めよ。

解答　$(2-\sqrt{3},\ 0)$，$(2+\sqrt{3},\ 0)$

解説

共有点の x 座標は，２次方程式 $x^2-4x+1=0$ の解である。

これを解くと　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot1}}{1}=2\pm\sqrt{3}$

よって，共有点の座標は　$(2-\sqrt{3},\ 0)$，$(2+\sqrt{3},\ 0)$

5 次の２次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(1) $y=x^2+5x+8$　(2) $y=2x^2-6x+3$　(3) $y=3x^2+6x+3$

解答　(1) ０個　(2) ２個　(3) １個

解説

(1) ２次方程式 $x^2+5x+8=0$ の判別式を D とすると

$D=5^2-4\cdot1\cdot8=-7<0$　よって，グラフと x 軸の共有点の個数は　０個

(2) ２次方程式 $2x^2-6x+3=0$ の判別式を D とすると

$D=(-6)^2-4\cdot2\cdot3=12>0$　よって，グラフと x 軸の共有点の個数は　２個

(3) ２次方程式 $3x^2+6x+3=0$ の判別式を D とすると

$D=6^2-4\cdot3\cdot3=0$　よって，グラフと x 軸の共有点の個数は　１個

6 放物線 $y=x^2+5x+3$ と直線 $y=-x-6$ に共有点があれば，その座標を求めよ。

解答　$(-3,\ -3)$

解説

共有点の x 座標は，２次方程式 $x^2+5x+3=-x-6$ の実数解である。

式を整理すると　$x^2+6x+9=0$

よって　$(x+3)^2=0$　ゆえに　$x=-3$

$y=-x-6$ に代入すると　$y=-3$　よって，共有点の座標は　$(-3,\ -3)$

7 放物線 $y=x^2-4x+3$ と直線 $y=2x+k$ が接するとき，定数 k の値を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

解答　$k=-6$，$(3,\ 0)$

解説

共有点の x 座標は，２次方程式 $x^2-4x+3=2x+k$ の実数解である。

式を整理すると　$x^2-6x+3-k=0$　……①

この２次方程式の判別式を D とすると

$D=(-6)^2-4\cdot1\cdot(3-k)=4(k+6)$

放物線と直線が接するのは，$D=0$ のときであるから

$k+6=0$　よって　$k=-6$

このとき，接点の x 座標は，① の重解であり　$x=-\dfrac{-6}{2\cdot1}=3$

$y=2x+k$ すなわち $y=2x-6$ に，$x=3$ を代入すると　$y=0$

したがって，接点の座標は　$(3,\ 0)$

8 ２次不等式 $-2x^2+ax+b>0$ の解が $-1<x<2$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。

解答　$a=2$，$b=4$

解説

２次不等式 $-2x^2+ax+b>0$ の解が $-1<x<2$ であるから，２次関数

$y=-2x^2+ax+b$ のグラフは，x 軸と２点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，$-1<x<2$ の範囲では，グラフは x 軸より上側にある。

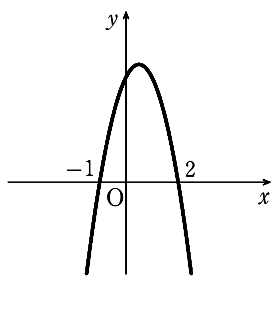
よって，$f(x)=-2x^2+ax+b$ とおくと

$f(-1)=0$，$f(2)=0$

したがって　$-2-a+b=0$

$-8+2a+b=0$

これを解いて　$a=2$，$b=4$



$\boxed{9}$ 次の 2 次不等式を解け。

(1) $7x-13-x^2 \leqq 0$ (2) $12(x-3)<x^2$ (3) $-x(3x-4)>7$

(4) $6(x^2-1)>5x$ (5) $3x^2+x \geqq 2x^2+1$ (6) $x^2+2\sqrt{6}x \leqq -6$

解答 (1) すべての実数 (2) 6 以外のすべての実数 (3) 解はない

(4) $x<-\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}<x$ (5) $x \leqq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqq x$ (6) $x=-\sqrt{6}$

解説

(1) 整理すると $-x^2+7x-13 \leqq 0$

両辺に -1 を掛けて $x^2-7x+13 \geqq 0$

2 次方程式 $x^2-7x+13=0$ の解は $x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot13}}{2\cdot1}$

根号内が負より，この 2 次方程式は解を持たない。つまり，$y=x^2-7x+13$ のグラフは x 軸と共有点をもたないので，この 2 次不等式の解は すべての実数

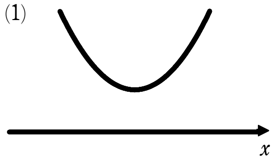
(2) 整理すると $-x^2+12x-36<0$

両辺に -1 を掛けて $x^2-12x+36>0$

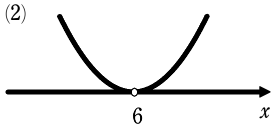
ゆえに $(x-6)^2>0$

よって，この 2 次不等式の解は 6 以外のすべての実数

(1)



(2)



(3) 整理すると $-3x^2+4x-7>0$

両辺に -1 を掛けて $3x^2-4x+7<0$

2 次方程式 $3x^2-4x+7=0$ の解は $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\cdot7}}{3}$

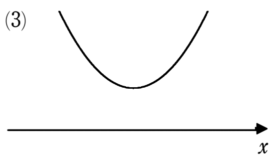
根号内が負より，この 2 次方程式は解を持たない。つまり，$y=3x^2-4x+7$ のグラフは x 軸と共有点をもたないので，この 2 次不等式の解はない。

(4) 整理すると $6x^2-5x-6>0$

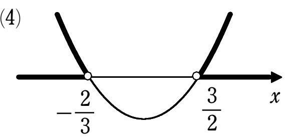
$6x^2-5x-6=0$ を解くと $x=-\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$

よって，この 2 次不等式の解は $x<-\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}<x$

(3)



(4)



(5) 整理すると $x^2+x-1 \geqq 0$

$x^2+x-1=0$ を解くと $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

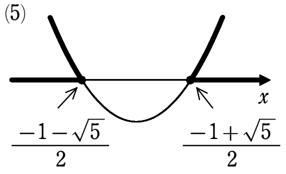
よって，この 2 次不等式の解は $x \leqq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqq x$

(6) 整理すると $x^2+2\sqrt{6}\,x+6 \leqq 0$

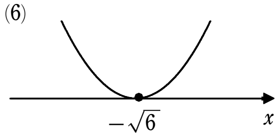
ゆえに $(x+\sqrt{6})^2 \leqq 0$

よって，この 2 次不等式の解は $x=-\sqrt{6}$

(5)



(6)



$\boxed{10}$ 次の不等式を解け。 $-8<x^2-6x \leqq 0$

解答 $0 \leqq x<2$，$4<x \leqq 6$

解説

$-8<x^2-6x \leqq 0$ から $\begin{cases} -8<x^2-6x & \cdots\cdots ① \\ x^2-6x \leqq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から $x^2-6x+8>0$ ゆえに $(x-2)(x-4)>0$

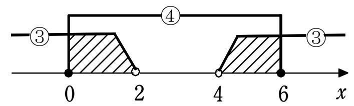
よって $x<2$，$4<x$ ……③

② から $x(x-6) \leqq 0$

よって $0 \leqq x \leqq 6$ ……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$0 \leqq x<2$，$4<x \leqq 6$



$\boxed{11}$ 2 次方程式 $x^2+(m-1)x+2m-1=0$ が実数解をもたないように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答 $5-2\sqrt{5}<m<5+2\sqrt{5}$

解説

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=(m-1)^2-4\cdot1\cdot(2m-1)=m^2-10m+5$

2 次方程式が実数解をもたないのは $D<0$ のときであるから

$m^2-10m+5<0$

$m^2-10m+5=0$ を解くと $m=5\pm2\sqrt{5}$

よって，求める m の値の範囲は $5-2\sqrt{5}<m<5+2\sqrt{5}$

$\boxed{12}$ 2 つの 2 次関数 $y=x^2+2mx+m+2$，$y=x^2+mx+m$ のグラフがともに x 軸と共有点をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答 $m \leqq -1$，$4 \leqq m$

解説

2 次方程式 $x^2+2mx+m+2=0$，$x^2+mx+m=0$ の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると $D_1=(2m)^2-4\cdot1\cdot(m+2)=4(m^2-m-2)=4(m+1)(m-2)$

$D_2=m^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)$

2 つの 2 次関数のグラフがともに x 軸と共有点をもつのは，$D_1 \geqq 0$ かつ $D_2 \geqq 0$ のときである。

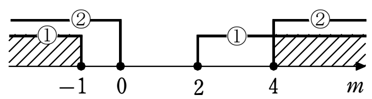
$D_1 \geqq 0$ から $(m+1)(m-2) \geqq 0$ よって $m \leqq -1$，$2 \leqq m$ ……①

$D_2 \geqq 0$ から $m(m-4) \geqq 0$

よって $m \leqq 0$，$4 \leqq m$ ……②

① と ② の共通範囲を求めて

$m \leqq -1$，$4 \leqq m$



$\boxed{13}$ 2 次不等式 $ax^2+2x+a<0$ の解がすべての実数であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答 $a<-1$

解説

2 次方程式 $ax^2+2x+a=0$ の判別式を D とすると

$D=2^2-4\cdot a\cdot a=4(1-a^2)$

2 次不等式 $ax^2+2x+a<0$ の解がすべての実数であるのは，$a<0$ かつ $D<0$ のときである。

$4(1-a^2)<0$ から $(a+1)(a-1)>0$ よって $a<-1$，$1<a$

これと $a<0$ の共通範囲を求めて $a<-1$

$\boxed{14}$ x についての不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$，$3x^2+2x-1>0$ を同時に満たす整数 x がちょうど 3 つ存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答 $-5 \leqq a<-4$，$4<a \leqq 5$

解説

$x^2-(a+1)x+a<0$ を解くと $(x-a)(x-1)<0$ から

$\left.\begin{array}{ll} a<1 \text{ のとき} & a<x<1 \\ a=1 \text{ のとき} & \text{解なし} \\ a>1 \text{ のとき} & 1<x<a \end{array}\right\}$ ……①

$3x^2+2x-1>0$ を解くと，$(x+1)(3x-1)>0$ から $x<-1$，$\frac{1}{3}<x$ ……②

①，② を同時に満たす整数 x がちょうど 3 つ存在するのは

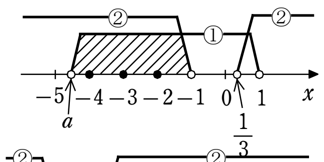
$a<1$ または $a>1$ の場合である。

[1] $a<1$ のとき

3 つの整数 x は

$x=-4$，-3，-2

よって $-5 \leqq a<-4$

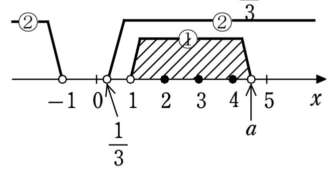


[2] $a>1$ のとき

3 つの整数 x は

$x=2$，3，4

よって $4<a \leqq 5$



[1]，[2] から，求める a の値の範囲は

$-5 \leqq a<-4$，$4<a \leqq 5$

$\boxed{15}$ 2 次関数 $y=x^2-2mx+m+2$ のグラフが x 軸の $x>1$ の部分と，異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

解答 $2<m<3$

解説

$f(x)=x^2-2mx+m+2$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=m$ である。

グラフと x 軸の $x>1$ の部分が，異なる 2 点で交わるのは，次の [1]～[3] が同時に成り立つときである。

[1] グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(-2m)^2-4\cdot1\cdot(m+2)=4(m^2-m-2)$

$=4(m+1)(m-2)$

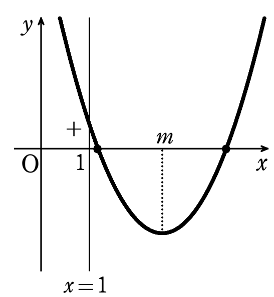
$D>0$ から $m<-1$，$2<m$ ……①

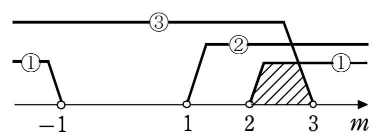
[2] 軸 $x=m$ について $m>1$ ……②

[3] $f(1)>0$ すなわち $1^2-2m\cdot1+m+2>0$

よって $m<3$ ……③

①，②，③ の共通範囲を求めて $2<m<3$





数学演習（２次方程式･２次不等式）Ｒ２．９．１９

解の公式で「＝0」と書く者がいる。 $x^2-2x-1=0$ $-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-1)}=0$

判別式 $D=\sqrt{b^2-4ac}$ になってる者がいる

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1 次の２次方程式を解け。

解の公式は簡単バージョンを使った方がいい

解の公式で根号がはずれたら因数分解できる.

(1) $x^2=5x$　　(2) $25x^2-9=0$

(3) $(x-1)^2=2$　　(4) $x^2-5x+8=0$

(5) $x^2-\frac{7}{6}x-\frac{1}{2}=0$　　(6) $20x-25-4x^2=0$

(7) $(x+6)(x-1)=x(7-3x)$　　(8) $(x+2)^2-5(x+2)+5=0$

(9) $1.5x(2-0.5x)=0.5x+2$　　(10) $x^2-5\sqrt{3}x+18=0$

解答 (1) $x=0,\ 5$　(2) $x=\pm\frac{3}{5}$　(3) $x=1\pm\sqrt{2}$　(4) 実数解をもたない

(5) $x=\frac{3}{2},\ -\frac{1}{3}$　(6) $x=\frac{5}{2}$　(7) $x=-1,\ \frac{3}{2}$　(8) $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(9) $x=2,\ \frac{4}{3}$　(10) $x=2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}$

$(5x+3)(5x-3)=0.\ x=\pm3$ など

解説

(1) $x^2-5x=0$ より $x(x-5)=0$ から　$x=0$ または $x-5=0$

したがって　$x=0,\ 5$

$x=5$ のみ多し

(2) 因数分解してもよい

(2) $25x^2=9$ から　$x^2=\frac{9}{25}$　よって　$x=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=\pm\frac{3}{5}$

$\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=\pm\sqrt{2}$

(3) $(x-1)^2=2$ から　$x-1=\pm\sqrt{2}$　よって　$x=1\pm\sqrt{2}$

(4) 解の公式より　$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}$　根号内が負になるので

この２次方程式は実数解をもたない

そのまま計算する者多し

(5) 両辺に６を掛けて　$6x^2-7x-3=0$　左辺を因数分解して　$(2x-3)(3x+1)=0$

よって　$2x-3=0$ または $3x+1=0$　したがって　$x=\frac{3}{2},\ -\frac{1}{3}$

これをしない者がいる

(6) 両辺に -1 を掛けて，整理すると　$4x^2-20x+25=0$

左辺を因数分解して　$(2x-5)^2=0$　すなわち　$2x-5=0$　よって　$x=\frac{5}{2}$

(7) 両辺を展開して　$x^2+5x-6=7x-3x^2$　整理すると　$4x^2-2x-6=0$

両辺を２で割って　$2x^2-x-3=0$　左辺を因数分解して　$(x+1)(2x-3)=0$

よって　$x+1=0$ または $2x-3=0$　したがって　$x=-1,\ \frac{3}{2}$

(8) $x+2=X$ とおくと　$X^2-5X+5=0$

解の公式により

$$X=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$　よって　$x+2=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

したがって　$x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}-2=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

ここで終わる者がいる

別解 左辺を展開して整理すると　$x^2-x-1=0$

解の公式により

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$15x(20-5x)=5x+20$ も多し

(9) 両辺に 100 を掛けて　$15x(20-5x)=50x+200$

両辺を５で割って　$3x(20-5x)=10x+40$

両辺を５で割って　$3x(4-x)=2x+8$

展開して整理すると　$3x^2-10x+8=0$

$(x-4)(3x+2)$ と因数分解してしまう者多し

左辺を因数分解して　$(x-2)(3x-4)=0$

よって　$x-2=0$ または $3x-4=0$　したがって　$x=2,\ \frac{4}{3}$

x^2 が出ない者もいる

参考 最初に両辺に４を掛けてもよい。

(10) 解の公式により

$$x=\frac{-(-5\sqrt{3})\pm\sqrt{(-5\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot18}}{2\cdot1}=\frac{5\sqrt{3}\pm\sqrt{3}}{2}$$

ここで終わる者がいる

$\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，$\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ であるから　$x=2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}$

2 ２次方程式 $x^2+mx+m+3=0$ が重解をもつとき，定数 m の値を求めよ。また，そのときの重解を求めよ。

解答 $m=-2$ のとき重解 $x=1$，$m=6$ のとき重解 $x=-3$

重解なのに座標になっている者がいる

解説

この２次方程式の判別式を D とすると

$D=m^2-4\cdot1\cdot(m+3)=m^2-4m-12$

２次方程式が重解をもつのは $D=0$ のときであるから　$m^2-4m-12=0$

すなわち　$(m+2)(m-6)=0$

よって　$m=-2,\ 6$

$m=☆$ のとき 重解 $x=△$ と書く.

また，重解は $x=-\frac{m}{2}$ であるから

$m=-2$ のとき $x=1$，$m=6$ のとき $x=-3$

3 x の２次方程式 $x^2+2x+m=0$ の実数解の個数を求めよ。

解答 $m<1$ のとき２個，$m=1$ のとき１個，$m>1$ のとき０個

解説

この２次方程式の判別式を D とすると

$D=2^2-4\cdot1\cdot m=4-4m=4(1-m)$

[1] $D>0$ すなわち $m<1$ のとき

実数解の個数は　２個

[2] $D=0$ すなわち $m=1$ のとき

実数解の個数は　１個

[3] $D<0$ すなわち $m>1$ のとき

実数解の個数は　０個

以上から，$m<1$ のとき　２個

$m=1$ のとき　１個

$m>1$ のとき　０個

場合分けしない者がいる

4 ２次関数のグラフ $y=x^2-4x+1$ と x 軸の共有点の座標を求めよ。

解答 $(2-\sqrt{3},\ 0)$，$(2+\sqrt{3},\ 0)$

解説

共有点の x 座標は，２次方程式 $x^2-4x+1=0$ の解である。

これを解くと　$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot1}}{1}=2\pm\sqrt{3}$

よって，共有点の座標は　$(2-\sqrt{3},\ 0)$，$(2+\sqrt{3},\ 0)$

5 次の２次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(1) $y=x^2+5x+8$　(2) $y=2x^2-6x+3$　(3) $y=3x^2+6x+3$

判別式を用いるのがふつう。解の公式でない

解答 (1) ０個　(2) ２個　(3) １個

解説

(1) ２次方程式 $x^2+5x+8=0$ の判別式を D とすると

$D=5^2-4\cdot1\cdot8=-7<0$　よって，グラフと x 軸の共有点の個数は　０個

(2) ２次方程式 $2x^2-6x+3=0$ の判別式を D とすると

$D=(-6)^2-4\cdot2\cdot3=12>0$　よって，グラフと x 軸の共有点の個数は　２個

(3) ２次方程式 $3x^2+6x+3=0$ の判別式を D とすると

$D=6^2-4\cdot3\cdot3=0$　よって，グラフと x 軸の共有点の個数は　１個

6 放物線 $y=x^2+5x+3$ と直線 $y=-x-6$ に共有点があれば，その座標を求めよ。

解答 $(-3,\ -3)$

解説

共有点の x 座標は，２次方程式 $x^2+5x+3=-x-6$ の実数解である。

式を整理すると　$x^2+6x+9=0$

よって　$(x+3)^2=0$　ゆえに　$x=-3$

これを間違える者多し（$x=3$ とする）

$y=-x-6$ に代入すると　$y=-3$　よって，共有点の座標は　$(-3,\ -3)$

7 放物線 $y=x^2-4x+3$ と直線 $y=2x+k$ が接するとき，定数 k の値を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

解答 $k=-6$，$(3,\ 0)$

解説

共有点の x 座標は，２次方程式 $x^2-4x+3=2x+k$ の実数解である。

式を整理すると　$x^2-6x+3-k=0$　……①

この２次方程式の判別式を D とすると

$D=(-6)^2-4\cdot1\cdot(3-k)=4(k+6)$

放物線と直線が接するのは，$D=0$ のときであるから

$k+6=0$　よって　$k=-6$

このとき，接点の x 座標は，①の重解であり　$x=-\frac{-6}{2\cdot1}=3$

$y=2x+k$ すなわち $y=2x-6$ に，$x=3$ を代入すると　$y=0$

y 座標を求めていない者がいる

したがって，接点の座標は　$(3,\ 0)$

8 ２次不等式 $-2x^2+ax+b>0$ の解が $-1<x<2$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。

解答 $a=2$，$b=4$

解説

２次不等式 $-2x^2+ax+b>0$ の解が $-1<x<2$ であるから，２次関数 $y=-2x^2+ax+b$ のグラフは，x 軸と２点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，$-1<x<2$ の範囲では，グラフは x 軸より上側にある。

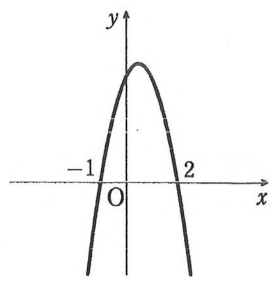
よって，$f(x)=-2x^2+ax+b$ とおくと

$f(-1)=0$，$f(2)=0$

したがって　$-2-a+b=0$

$-8+2a+b=0$

これを解いて　$a=2$，$b=4$



9 次の2次不等式を解け。

(1) $7x-13-x^2\leqq 0$　(2) $12(x-3)<x^2$　(3) $-x(3x-4)>7$

(4) $6(x^2-1)>5x$　(5) $3x^2+x\geqq 2x^2+1$　(6) $x^2+2\sqrt{6}\,x\leqq -6$

解答 (1) すべての実数　(2) 6以外のすべての実数　(3) 解はない

(4) $x<-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{2}<x$　(5) $x\leqq\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqq x$　(6) $x=-\sqrt{6}$

解説

2次方程式の解が ないので 不等式も解なしに してしまう

(1) 整理すると　$-x^2+7x-13\leqq 0$

両辺に -1 を掛けて　$x^2-7x+13\geqq 0$

2次方程式 $x^2-7x+13=0$ の解は　$x=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 13}}{2\cdot 1}$

根号内が負より，この2次方程式は解を持たない。つまり，$y=x^2-7x+13$ のグラフは x 軸と共有点をもたないので，この2次不等式の解は　すべての実数

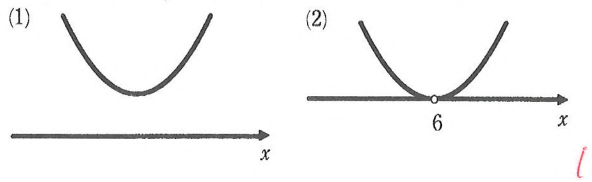
(2) 整理すると　$-x^2+12x-36<0$

$(x-6)^2>0$ ✗ → $x>6$

両辺に -1 を掛けて　$x^2-12x+36>0$

ゆえに　$(x-6)^2>0$

よって，この2次不等式の解は　6以外のすべての実数



(3x−7)(x+1) と因数分解 してしまう 者がいる

(3) 整理すると　$-3x^2+4x-7>0$

両辺に -1 を掛けて　$3x^2-4x+7<0$

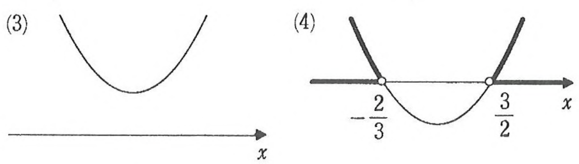
2次方程式 $3x^2-4x+7=0$ の解は　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\cdot 7}}{3}$

根号内が負より，この2次方程式は解を持たない。つまり，$y=3x^2-4x+7$ のグラフは x 軸と共有点をもたないので，この2次不等式の解はない。

(4) 整理すると　$6x^2-5x-6>0$

$6x^2-5x-6=0$ を解くと　$x=-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{2}$

よって，この2次不等式の解は　$x<-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{2}<x$



(5) 整理すると　$x^2+x-1\geqq 0$

$x^2+x-1=0$ を解くと　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　← これがちがう者多し

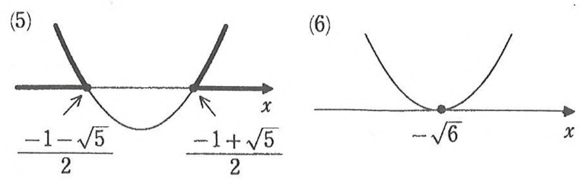
よって，この2次不等式の解は　$x\leqq\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqq x$

(6) 整理すると　$x^2+2\sqrt{6}\,x+6\leqq 0$

$(x+\sqrt{6})^2\leqq 0$ ✗ → $x\leqq-\sqrt{6}$

ゆえに　$(x+\sqrt{6})^2\leqq 0$

よって，この2次不等式の解は　$x=-\sqrt{6}$



10 次の不等式を解け。　$-8<x^2-6x\leqq 0$

解答 $0\leqq x<2,\ 4<x\leqq 6$

解説

$-8<x^2-6x\leqq 0$ から　$\begin{cases}-8<x^2-6x & \cdots\cdots ① \\ x^2-6x\leqq 0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$x^2-6x+8>0$　ゆえに　$(x-2)(x-4)>0$

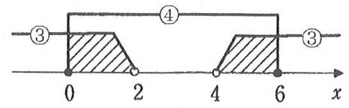
よって　$x<2,\ 4<x$ ……③

② から　$x(x-6)\leqq 0$

よって　$0\leqq x\leqq 6$ ……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$0\leqq x<2,\ 4<x\leqq 6$



11 2次方程式 $x^2+(m-1)x+2m-1=0$ が実数解をもたないように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答 $5-2\sqrt{5}<m<5+2\sqrt{5}$

文のとこイに なってる者 多し

解説

この2次方程式の判別式を D とすると

$D=(m-1)^2-4\cdot 1\cdot(2m-1)=m^2-10m+5$

2次方程式が実数解をもたないのは $D<0$ のときであるから

$m^2-10m+5<0$

$m^2-10m+5=0$ を解くと　$m=5\pm 2\sqrt{5}$　← これがちがう

よって，求める m の値の範囲は　$5-2\sqrt{5}<m<5+2\sqrt{5}$

12 2つの2次関数 $y=x^2+2mx+m+2$，$y=x^2+mx+m$ のグラフがともに x 軸と共有点をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答 $m\leqq -1,\ 4\leqq m$

イコールがない者多し

解説

2次方程式 $x^2+2mx+m+2=0$，$x^2+mx+m=0$ の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると　$D_1=(2m)^2-4\cdot 1\cdot(m+2)=4(m^2-m-2)=4(m+1)(m-2)$

$D_2=m^2-4\cdot 1\cdot m=m(m-4)$

2つの2次関数のグラフがともに x 軸と共有点をもつのは，$D_1\geqq 0$ かつ $D_2\geqq 0$ のときである。

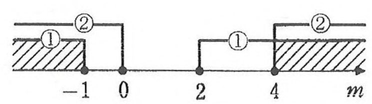
$D_1\geqq 0$ から　$(m+1)(m-2)\geqq 0$　よって　$m\leqq -1,\ 2\leqq m$ ……①

$D_2\geqq 0$ から　$m(m-4)\geqq 0$

よって　$m\leqq 0,\ 4\leqq m$ ……②

① と ② の共通範囲を求めて

$m\leqq -1,\ 4\leqq m$



13 2次不等式 $ax^2+2x+a<0$ の解がすべての実数であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答 $a<-1$

解説

2次方程式 $ax^2+2x+a=0$ の判別式を D とすると

$D=2^2-4\cdot a\cdot a=4(1-a^2)$

x^2の係数を考える

2次不等式 $ax^2+2x+a<0$ の解がすべての実数であるのは，$a<0$ かつ $D<0$ のときである。

$a^2<1$ → $a<\pm 1$

$4(1-a^2)<0$ から　$(a+1)(a-1)>0$　よって　ダメ　$a<-1,\ 1<a$

これと $a<0$ の共通範囲を求めて　$a<-1$

14 x についての不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$，$3x^2+2x-1>0$ を同時に満たす整数 x がちょうど3つ存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答 $-5\leqq a<-4,\ 4<a\leqq 5$

解説

$x^2-(a+1)x+a<0$ を解くと　$(x-a)(x-1)<0$ から

$\left.\begin{array}{ll}a<1\text{ のとき} & a<x<1 \\ a=1\text{ のとき} & \text{解なし} \\ a>1\text{ のとき} & 1<x<a\end{array}\right\}$ ……①

$3x^2+2x-1>0$ を解くと，$(x+1)(3x-1)>0$ から　$x<-1,\ \dfrac{1}{3}<x$ ……②

①，② を同時に満たす整数 x がちょうど3つ存在するのは

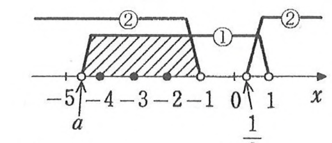
$a<1$　または　$a>1$　の場合である。

[1] $a<1$ のとき

3つの整数 x は

$x=-4,\ -3,\ -2$

よって　$-5\leqq a<-4$

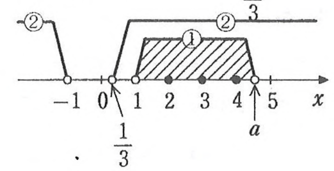


[2] $a>1$ のとき

3つの整数 x は

$x=2,\ 3,\ 4$

よって　$4<a\leqq 5$



[1]，[2] から，求める a の値の範囲は

$-5\leqq a<-4,\ 4<a\leqq 5$

15 2次関数 $y=x^2-2mx+m+2$ のグラフが x 軸の $x>1$ の部分と，異なる2点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

解答 $2<m<3$

解説

$f(x)=x^2-2mx+m+2$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=m$ である。

グラフと x 軸の $x>1$ の部分が，異なる2点で交わるのは，次の [1]～[3] が同時に成り立つときである。

[1] グラフと x 軸が異なる2点で交わる。

2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(-2m)^2-4\cdot 1\cdot(m+2)=4(m^2-m-2)$

$=4(m+1)(m-2)$

$D>0$ から　$m<-1,\ 2<m$ ……①

[2] 軸 $x=m$ について　$m>1$ ……②

[3] $f(1)>0$　すなわち　$1^2-2m\cdot 1+m+2>0$

よって　$m<3$ ……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$2<m<3$