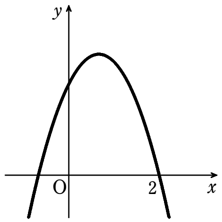
数学演習（２次方程式･２次不等式）Ｒ２．９．２　　(　)組(　)番　名前(　)

$\boxed{1}$ 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=-2x+k$ の共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

$\boxed{2}$ 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになるとき，次の値の符号を求めよ。

(1) a　(2) c　(3) $-\dfrac{b}{2a}$　(4) b

(5) b^2-4ac　(6) $a+b+c$



$\boxed{3}$ a は定数とする。2 次不等式 $x^2-ax-2a^2<0$ を，次の場合について解け。

(1) $a>0$ のとき　(2) $a<0$ のとき

$\boxed{4}$ 次の関数のグラフをかけ。　$y=x|x-2|+3$

$\boxed{5}$ 不等式 $|x^2-2x-3|\geqq 3-x$ を解け。

$\boxed{6}$ 2 次関数 $y=-x^2+4x+a^2+a$ において，$1\leqq x\leqq 4$ の範囲で y の値が常に正であるように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{7}$ 2 次関数 $y=x^2-2mx-m+6$ のグラフが x 軸の正の部分と，異なる 2 点で交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

$\boxed{8}$ 2 次関数 $y=x^2-2ax+4a+1$ のグラフが次の条件を満たすとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(1) $-1<x<0$, $0<x<1$ のそれぞれの範囲で x 軸と交わる。

(2) $-1<x<1$ の範囲で x 軸と異なる 2 点で交わる。

$\boxed{9}$ 2 次不等式 $x^2-2x\leqq 0$ を満たすすべての実数 x に対し，常に 2 次不等式 $x^2-2mx+1>0$ が成り立つとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

$\boxed{10}$ $x^2+y^2=16$ のとき　$6x+y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{11}$ 実数 x, y が $x^2+y^2=2$ を満たすとき，$2x+y$ のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x, y の値を求めよ。

数学演習（２次方程式・２次不等式）Ｒ２．９．２

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=-2x+k$ の共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

解答　$k>-1$ のとき 2 個，$k=-1$ のとき 1 個，$k<-1$ のとき 0 個

解説

共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2=-2x+k$ の実数解である。

式を整理すると　$x^2+2x-k=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=2^2-4\cdot1\cdot(-k)=4(1+k)$

$D>0$ となるのは　$k>-1$ のとき，

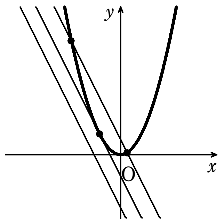
$D=0$ となるのは　$k=-1$ のとき，

$D<0$ となるのは　$k<-1$ のときである。

よって，共有点の個数は

$k>-1$ のとき 2 個，$k=-1$ のとき 1 個，

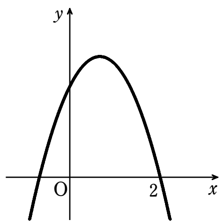
$k<-1$ のとき 0 個



2 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになるとき，次の値の符号を求めよ。

(1) a　(2) c　(3) $-\dfrac{b}{2a}$　(4) b

(5) b^2-4ac　(6) $a+b+c$



解答　(1) 負　(2) 正　(3) 正

(4) 正　(5) 正　(6) 正

解説

(1) 放物線が上に凸であるから　$a<0$

よって，a の符号は　負

(2) 放物線と y 軸の交点の y 座標が c である。

この点は x 軸の上側にあるから　$c>0$

よって，c の符号は　正

(3) 頂点の x 座標は $x=-\dfrac{b}{2a}$ で，y 軸の右側にあるから　$-\dfrac{b}{2a}>0$

よって，$-\dfrac{b}{2a}$ の符号は　正

(4) $a<0$ かつ $-\dfrac{b}{2a}>0$ より　$b>0$　　よって，b の符号は　正

(5) 放物線と x 軸は異なる 2 点を共有しているから　$b^2-4ac>0$

よって，b^2-4ac の符号は　正

(6) グラフ上の点で，x 座標が 1 である点の y 座標が $a+b+c$ である。

この点は x 軸の上側にあるから　$a+b+c>0$

よって，$a+b+c$ の符号は　正

3 a は定数とする。2 次不等式 $x^2-ax-2a^2<0$ を，次の場合について解け。

(1) $a>0$ のとき　　(2) $a<0$ のとき

解答　(1) $-a<x<2a$　(2) $2a<x<-a$

解説

$x^2-ax-2a^2=(x+a)(x-2a)$ より，放物線 $y=x^2-ax-2a^2$ は，x 軸と 2 点 $(-a,\ 0)$，$(2a,\ 0)$ で交わる。

(1) $a>0$ のとき　$-a<2a$

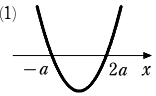
このとき，2 次不等式の解は

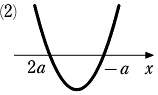
$-a<x<2a$

(2) $a<0$ のとき　$2a<-a$

このとき，2 次不等式の解は

$2a<x<-a$

(1)


(2)


4 次の関数のグラフをかけ。　$y=x|x-2|+3$

解答　[図] の実線部分

解説

$x\geqq2$ のとき

$y=x(x-2)+3=x^2-2x+3$

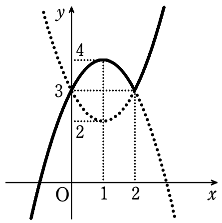
$=(x-1)^2+2$

$x<2$ のとき

$y=x\{-(x-2)\}+3=-x^2+2x+3$

$=-(x-1)^2+4$

グラフは右の図の実線部分。



5 不等式 $|x^2-2x-3|\geqq3-x$ を解け。

解答　$x\leqq-2,\ 0\leqq x$

解説

$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ であるから

$x^2-2x-3\geqq0$ の解は　$x\leqq-1,\ 3\leqq x$

$x^2-2x-3<0$ の解は　$-1<x<3$

[1] $x\leqq-1,\ 3\leqq x$ のとき，不等式は

$x^2-2x-3\geqq3-x$

ゆえに　$x^2-x-6\geqq0$

よって　$(x+2)(x-3)\geqq0$

したがって　$x\leqq-2,\ 3\leqq x$ …… ①

これは $x\leqq-1,\ 3\leqq x$ を満たす。

[2] $-1<x<3$ のとき，不等式は

$-(x^2-2x-3)\geqq3-x$

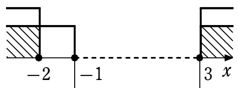
ゆえに　$x^2-3x\leqq0$

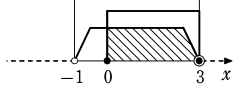
よって　$x(x-3)\leqq0$

したがって　$0\leqq x\leqq3$

$-1<x<3$ との共通範囲は　$0\leqq x<3$ …… ②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で　$x\leqq-2,\ 0\leqq x$

[1]


[2]


6 2 次関数 $y=-x^2+4x+a^2+a$ において，$1\leqq x\leqq4$ の範囲で y の値が常に正であるように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$a<-1,\ 0<a$

解説

2 次関数 $y=-x^2+4x+a^2+a$ …… ① の $1\leqq x\leqq4$ における最小値が正となればよい。

① のグラフは上に凸の放物線で，変形すると

$y=-(x-2)^2+a^2+a+4$

よって，軸は　直線 $x=2$

したがって，y は $1\leqq x\leqq4$ において $x=4$ で最小値をとる。

$x=4$ のとき

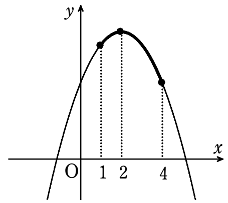
$y=-4^2+4\cdot4+a^2+a=a^2+a$

よって，y の $1\leqq x\leqq4$ における最小値が正となるとき

$a^2+a>0$

すなわち　$a(a+1)>0$

したがって，求める a の値の範囲は　$a<-1,\ 0<a$



7 2 次関数 $y=x^2-2mx-m+6$ のグラフが x 軸の正の部分と，異なる 2 点で交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答　$2<m<6$

解説

関数の式を変形すると

$y=(x-m)^2-m^2-m+6$

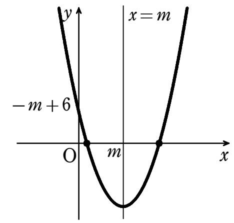
グラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=m$ である。

グラフが x 軸の正の部分と，異なる 2 点で交わるのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。

[1]　グラフが x 軸と異なる 2 点で交わる。

[2]　グラフの軸が y 軸の右側にある。

[3]　グラフと y 軸の交点の y 座標が正である。



[1] より，2 次方程式 $x^2-2mx-m+6=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ である。

$D=(-2m)^2-4\cdot1\cdot(-m+6)=4(m^2+m-6)$

よって　$m^2+m-6>0$

すなわち　$(m+3)(m-2)>0$

これを解くと　$m<-3,\ 2<m$ …… ①

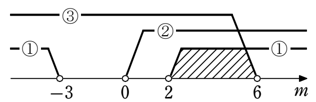
[2] から　$m>0$ …… ②

[3] から　$-m+6>0$

よって　$m<6$ …… ③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$2<m<6$



$\boxed{8}$ 2次関数 $y=x^2-2ax+4a+1$ のグラフが次の条件を満たすとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(1) $-1<x<0$，$0<x<1$ のそれぞれの範囲で x 軸と交わる。

(2) $-1<x<1$ の範囲で x 軸と異なる 2 点で交わる。

解答 (1) $-\frac{1}{3}<a<-\frac{1}{4}$ (2) $-\frac{1}{3}<a<2-\sqrt{5}$

解説

$f(x)=x^2-2ax+4a+1$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。

(1) $y=f(x)$ のグラフが $-1<x<0$，$0<x<1$ のそれぞれの範囲で x 軸と交わるのは，次の [1]～[3] が同時に成り立つときである。

[1] $f(-1)>0$ すなわち $6a+2>0$

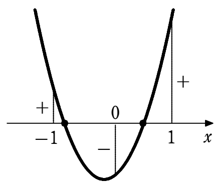
よって $a>-\frac{1}{3}$ …… ①

[2] $f(0)<0$ すなわち $4a+1<0$

よって $a<-\frac{1}{4}$ …… ②

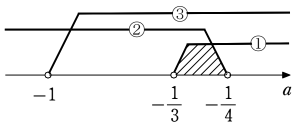
[3] $f(1)>0$ すなわち $2a+2>0$

よって $a>-1$ …… ③



①，②，③ の共通範囲を求めて

$-\frac{1}{3}<a<-\frac{1}{4}$



(2) 2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(-2a)^2-4\cdot1\cdot(4a+1)=4(a^2-4a-1)$

$y=f(x)$ のグラフの軸は 直線 $x=a$

$y=f(x)$ のグラフが $-1<x<1$ の範囲で x 軸と異なる 2 点で交わるのは，次の [1]～[4] が同時に成り立つときである。

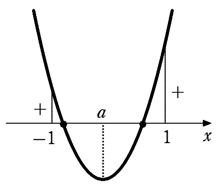
[1] $D>0$ すなわち $a^2-4a-1>0$

$a^2-4a-1=0$ を解くと

$a=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-1)}}{1}=2\pm\sqrt{5}$

よって，$a^2-4a-1>0$ の解は

$a<2-\sqrt{5}$，$2+\sqrt{5}<a$ …… ①



[2] 軸について $-1<a<1$ …… ②

[3] $f(-1)>0$ すなわち $6a+2>0$

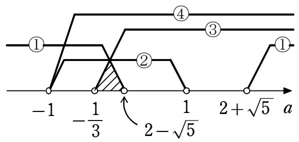
よって $a>-\frac{1}{3}$ …… ③

[4] $f(1)>0$ すなわち $2a+2>0$

よって $a>-1$ …… ④

①，②，③，④ の共通範囲を求めて

$-\frac{1}{3}<a<2-\sqrt{5}$



$\boxed{9}$ 2次不等式 $x^2-2x\leqq0$ を満たすすべての実数 x に対し，常に 2 次不等式 $x^2-2mx+1>0$ が成り立つとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

解答 $m<1$

解説

$x^2-2x\leqq0$ を解くと $0\leqq x\leqq2$

$f(x)=x^2-2mx+1$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，その軸の方程式は $x=m$ である。

$0\leqq x\leqq2$ を満たすすべての実数 x に対し，常に 2 次不等式 $x^2-2mx+1>0$ が成り立つのは，$0\leqq x\leqq2$ における $f(x)$ の最小値が 0 より大きいときである。

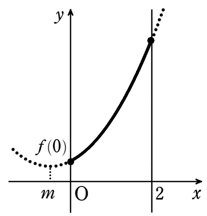
[1] $m<0$ のとき

$0\leqq x\leqq2$ において，$f(x)$ は $x=0$ で最小値をとる。

よって，条件を満たすには，$f(0)>0$ が成り立てばよい。

$f(0)=1$ であるから，これは常に成り立つ。

したがって，$m<0$ …… ① のときは常に条件を満たす。



[2] $0\leqq m\leqq2$ のとき

$0\leqq x\leqq2$ において，$f(x)$ は $x=m$ で最小値をとる。

よって，条件を満たすには，$f(m)>0$ が成り立てばよい。

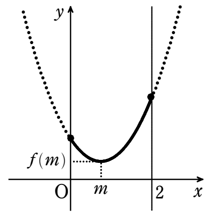
$f(m)>0$ から $m^2-2m\cdot m+1>0$

すなわち $1-m^2>0$

これを解いて $-1<m<1$

これと $0\leqq m\leqq2$ の共通範囲は

$0\leqq m<1$ …… ②



[3] $2<m$ のとき

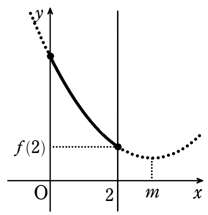
$0\leqq x\leqq2$ において，$f(x)$ は $x=2$ で最小値をとる。

よって，条件を満たすには，$f(2)>0$ が成り立てばよい。

$f(2)>0$ から $2^2-2m\cdot2+1>0$

すなわち $m<\frac{5}{4}$

これは，$2<m$ を満たさない。



求める m の値の範囲は，① と ② の範囲を合わせて

$m<1$

$\boxed{10}$ $x^2+y^2=16$ のとき $6x+y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

解答 $x=3$，$y=\pm\sqrt{7}$ で最大値 25；$x=-4$，$y=0$ で最小値 -24

解説

$x^2+y^2=16$ から $y^2=16-x^2$ …… ①

$y^2\geqq0$ であるから $16-x^2\geqq0$

ゆえに $-4\leqq x\leqq4$

また $6x+y^2=6x+(16-x^2)=-(x-3)^2+25$

$-4\leqq x\leqq4$ において，$6x+y^2$ は

$x=3$ で最大値 25，$x=-4$ で最小値 -24

をとる。

① から，$x=3$ のとき $y=\pm\sqrt{7}$

$x=-4$ のとき $y=0$

したがって，$6x+y^2$ は

$x=3$，$y=\pm\sqrt{7}$ で最大値 25，$x=-4$，$y=0$ で最小値 -24

をとる。

$\boxed{11}$ 実数 x，y が $x^2+y^2=2$ を満たすとき，$2x+y$ のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

解答 $x=\frac{2\sqrt{10}}{5}$，$y=\frac{\sqrt{10}}{5}$ のとき最大値 $\sqrt{10}$；

$x=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$，$y=-\frac{\sqrt{10}}{5}$ のとき最小値 $-\sqrt{10}$

解説

$2x+y=t$ とおくと $y=t-2x$ …… ①

これを $x^2+y^2=2$ に代入すると $x^2+(t-2x)^2=2$

整理すると $5x^2-4tx+t^2-2=0$ …… ②

この x についての 2 次方程式 ② が実数解をもつための条件は，② の判別式を D とすると $D\geqq0$

ここで $\frac{D}{4}=(-2t)^2-5(t^2-2)=-(t^2-10)$

$D\geqq0$ から $t^2-10\leqq0$

これを解いて $-\sqrt{10}\leqq t\leqq\sqrt{10}$

$t=\pm\sqrt{10}$ のとき $D=0$ で，② は重解 $x=-\frac{-4t}{2\cdot5}=\frac{2t}{5}$ をもつ。

$t=\pm\sqrt{10}$ のとき $x=\pm\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ① から $y=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$ （複号同順）

したがって $x=\frac{2\sqrt{10}}{5}$，$y=\frac{\sqrt{10}}{5}$ のとき最大値 $\sqrt{10}$

$x=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$，$y=-\frac{\sqrt{10}}{5}$ のとき最小値 $-\sqrt{10}$