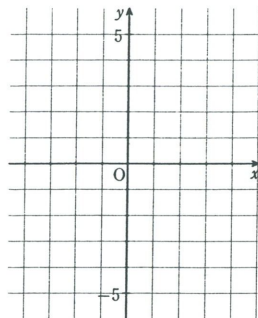

(3) $y = x^2 - 6x + 5$

軸 _____

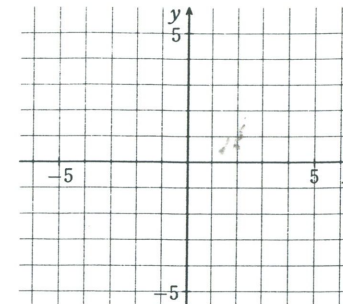
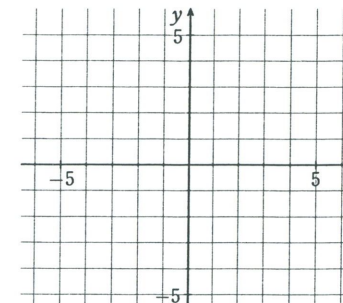


值 域 _____

最大值 _____

最小值 _____

頂点 _____


$$(4) \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$


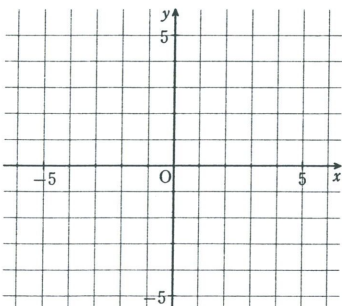
軸 _____

頂点 _____

4. 放物線 $y=x^2+2x+3$ を平行移動して放物線 $y=x^2-6x+7$ に重ねるには、どのように平行移動すればよいか。

軸 _____

頂点 _____

$$(2) \quad y = 2(x + 2)^2 - 4$$


軸 _____

頂点 _____

(1) x 軸,

(2) y 軸

(3) 原点

$$(1) \quad y = -3x^2 - 6x$$

最大值 _____

最小值 _____

(2) $y = x^2 - 4x + 5 \quad (1 \leq x \leq 3)$

最大值 _____

最小值 _____

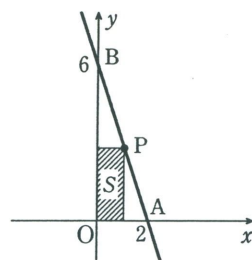
$$(3) \quad y = -x^2 + x \quad (-2 < x < 0)$$

最大值 _____

最小值 _____

8. 関数 $y = x^2 - 4x + a$ ($0 \leq x \leq 5$) の最大値が 11 であるように、定数 a の値を定めよ。
また、そのときの最小値を求めよ。

9. 右の図のように、直線 $3x + y = 6$ 上において 2 点 A, B の間を点 $P(x, y)$ が動く。
(1) 斜線で示した長方形の面積 S を x で表せ。



- (2) S の最大値およびそのときの点 P の座標を求めよ。

10. 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。
(1) 頂点が点 $(-1, 3)$ で、点 $(-2, 7)$ を通る。

- (2) 軸が直線 $x = -1$ で、2 点 $(1, -5)$, $(-2, 1)$ を通る。

- (3) 3 点 $(1, 3)$, $(-1, 9)$, $(2, 6)$ を通る。

11. x の 2 次関数 $y = x^2 + 4ax + 4a$ について
(1) この関数の最小値 m を a で表せ。

- (2) a の関数 m の最大値と、そのときの a の値を求めよ。

12. a は定数とする。関数 $y = -x^2 + 2ax + a$ について
(1) 頂点を求めよ。

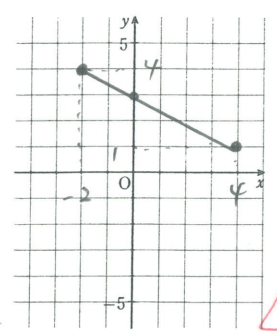
- (2) $0 \leq x \leq 4$ のとき、最大値を求めよ。

- (3) $0 \leq x \leq 4$ のとき、最小値を求めよ。

最大値・最小値の座標は必ず書き

1. 関数 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ($-2 \leq x \leq 4$) のグラフをかけ。

また、関数の値域と最大値、最小値を求めよ。



$x = -2$ のとき $y = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 3 = 4$
 $x = 4$ のとき $y = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = 1$

値域 $1 \leq y \leq 4$
 最大値 4 ($x = -2$)
 最小値 1 ($x = 4$)

2. 関数 $y = ax + b$ ($-2 \leq x \leq 1$) の値域が $-6 \leq y \leq 9$ となるような定数 a, b の値を求めよ。

• $a > 0$ のとき
 $-2a + b = -6$
 $a + b = 9$
 $a = 5, b = 4$
 2点 $(-2, -6), (1, 9)$ を通る

• $a < 0$ のとき
 $-2a + b = 9$
 $a + b = -6$
 $a = -5, b = -1$
 2点 $(-2, 9), (1, -6)$ を通る

• $a = 0$ のとき
 不適

3. 次の2次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

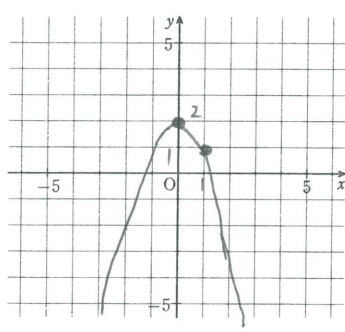
(1) $y = -x^2 + 2$

$y = -(x-0)^2 + 2$

$x=0$ とき

軸 y 軸

頂点 $(0, 2)$

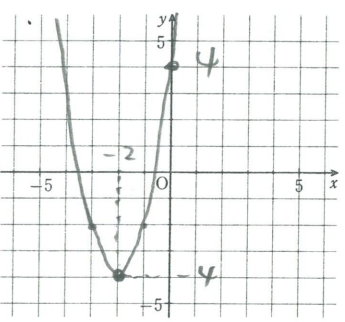


(2) $y = 2(x+2)^2 - 4$

$y = 2(0+2)^2 - 4 = 8 - 4 = 4$

軸 $x = -2$

頂点 $(-2, -4)$

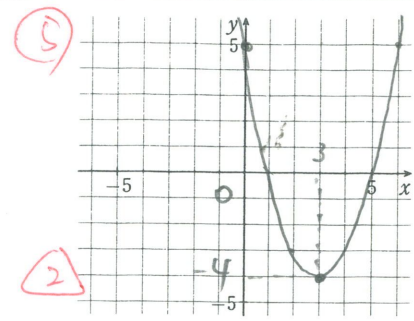


(3) $y = x^2 - 6x + 5$

$y = (x-3)^2 - 4$

軸 $x = 3$

頂点 $(3, -4)$

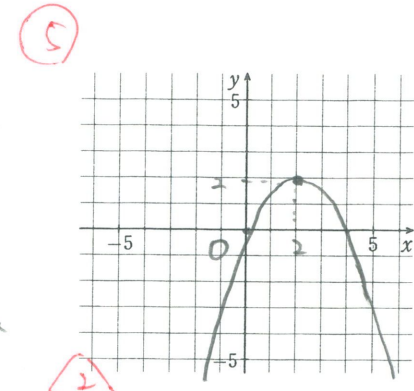


(4) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

$y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

軸 $x = 2$

頂点 $(2, 2)$



4. 放物線 $y = x^2 + 2x + 3$ を平行移動して放物線 $y = x^2 - 6x + 7$ に重ねるには、どのように平行移動すればよいか。

$y = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$
 頂点 $(-1, 2)$

$y = x^2 - 6x + 7 = (x-3)^2 - 2$
 頂点 $(3, -2)$

点 $(-1, 2)$ から
 点 $(3, -2)$ へ
 平行移動

5. ある放物線を x 軸方向に -3 , y 軸方向に 2 だけ平行移動したとき、移動後の放物線の方程式は $y = x^2 + 8x + 17$ であった。もとの放物線の方程式を求めよ。

$y = x^2 + 8x + 17 = (x+4)^2 + 1$

$y = x^2 + 8x + 17$ を x 軸方向に -3 , y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

$y - (-2) = (x - (-3))^2 + 8(x - (-3)) + 17$

$y + 2 = (x + 3)^2 + 8x + 24 + 17$
 $y = x^2 + 2x + 2 - 2$

よって
 $y = x^2 + 2x$
 $y = x(x+2)$

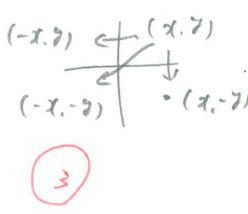
6. 2次関数 $y = 2x^2 + x - 5$ のグラフの、次の直線または点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式を求めよ。

(1) x 軸

$x \leftarrow -x, y \leftarrow -y$

$-y = 2x^2 + x - 5$

$y = -2x^2 - x + 5$



(2) y 軸

$x \leftarrow -x, y \leftarrow y$

$y = 2(-x)^2 + (-x) - 5$

$y = 2x^2 - x - 5$

(3) 原点

$x \leftarrow -x, y \leftarrow -y$

$-y = 2(-x)^2 + (-x) - 5$
 $-y = 2x^2 - x - 5$

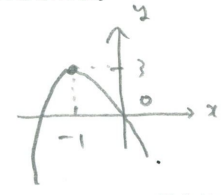
$y = -2x^2 + x + 5$

7. 次の関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

(1) $y = -3x^2 - 6x$

$y = -3(x^2 + 2x) = -3(x+1)^2 + 3$

頂点 $(-1, 3)$

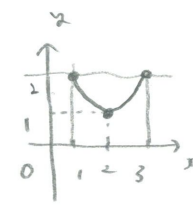


最大値 3 ($x = -1$)
 最小値 無し

(2) $y = x^2 - 4x + 5$ ($1 \leq x \leq 3$)

$y = (x-2)^2 + 1$

頂点 $(2, 1)$

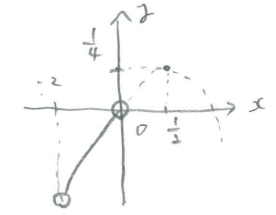


最大値 2 ($x = 1, 3$)
 最小値 1 ($x = 2$)

(3) $y = -x^2 + x$ ($-2 < x < 0$)

$y = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$

頂点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$



最大値 無し
 最小値 無し

7. 平方完成の問題、7.1.3 参照

8. 関数 $y = x^2 - 4x + a$ ($0 \leq x \leq 5$) の最大値が 11 であるように、定数 a の値を定めよ。
また、そのときの最小値を求めよ。

$$y = x^2 - 4x + a$$

$$= (x-2)^2 - 2^2 + a$$

$$= (x-2)^2 - 4 + a$$

軸 $x = 2$

$0 \leq x \leq 5$ において $x = 5$ で最大

最大値は $x = 5$ を代入 (6)

$$y = 5^2 - 4 \cdot 5 + a$$

$$= 25 - 20 + a = 5 + a$$

最大値が 11 より $5 + a = 11$

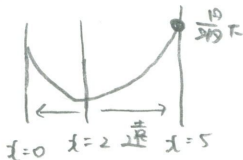
$$a = 6$$

最小値は $x = 2$ のときより

$$y = -4 + a$$

$a = 6$ より $y = 2$

注意



9. 右の図のように、直線 $3x + y = 6$ 上において 2 点 A, B の間を点 $P(x, y)$ が動く。

(1) 斜線で示した長方形の面積 S を x で表せ。

点 $P(x, y)$ は直線 $3x + y = 6$ 上より

$$3x + y = 6 \Rightarrow y = -3x + 6$$

また長方形の面積 S は $S = xy$ より

$$y = -3x + 6$$

$$S = x(-3x + 6) = -3x^2 + 6x$$

(2) S の最大値およびそのときの点 P の座標を求めよ。

点 P は線分 AB 上を動くより

点 P の x 座標は $0 \leq x \leq 2$ の間。

$$0 < x < 2 \quad \text{--- (1)}$$

また (1) より

$$S = -3x^2 + 6x$$

$$= -3(x^2 - 2x)$$

$$= -3\left\{(x-1)^2 - 1^2\right\}$$

$$= -3(x-1)^2 + 3$$

また (1) において S は

$x = 1$ のとき最大値 3

である。

$$x = 1$$

$$y = 3$$

点 $P(1, 3)$

10. 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 $(-1, 3)$ で、点 $(-2, 7)$ を通る。

$$y = a(x+1)^2 + 3$$

点 $(-2, 7)$ を通るより

$$7 = a(-2+1)^2 + 3$$

$$7 = a \cdot 1 + 3$$

$$a + 3 = 7$$

$$a = 4$$

(2) 軸が直線 $x = -1$ で、2 点 $(1, -5)$, $(-2, 1)$ を通る。

$$y = a(x+1)^2 + p$$

点 $(1, -5)$ を通る

$$-5 = a(1+1)^2 + p$$

$$4a + p = -5 \quad \text{--- (1)}$$

点 $(-2, 1)$ を通る

$$1 = a(-2+1)^2 + p$$

$$a + p = 1 \quad \text{--- (2)}$$

(3) 3 点 $(1, 3)$, $(-1, 9)$, $(2, 6)$ を通る。

$$y = ax^2 + bx + c$$

点 $(1, 3)$ を通る

$$3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$a + b + c = 3 \quad \text{--- (1)}$$

点 $(-1, 9)$ を通る

$$9 = a(-1)^2 + b(-1) + c$$

$$a - b + c = 9 \quad \text{--- (2)}$$

点 $(2, 6)$ を通る

$$6 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

11. x の 2 次関数 $y = x^2 + 4ax + 4a$ について

(1) この関数の最小値 m を a で表せ。

$$y = x^2 + 4ax + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - (2a)^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

$$= (x+2a)^2 - 4a^2 + 4a$$

(2) a の関数 m の最大値と、そのときの a の値を求めよ。

m は a の 2 次関数より

$$m = -4a^2 + 4a$$

$$= -4(a^2 - a)$$

$$= -4\left\{(a-\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2\right\}$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 4(\frac{1}{2})^2$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$m = -4a^2 + 4a$$

$$= -4(a^2 - a)$$

$$= -4\left\{(a-\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2\right\}$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 4(\frac{1}{2})^2$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

$$= -4(a-\frac{1}{2})^2 + 1$$

注意

12. a は定数とする。関数 $y = -x^2 + 2ax + a$ について

(1) 頂点を求めよ。

$$y = -(x^2 - 2ax) + a$$

$$= -(x-a)^2 - a^2 + a + a$$

$$= -(x-a)^2 + a^2 + a$$

頂点 $(a, a^2 + a)$

(2) $0 \leq x \leq 4$ のとき、最大値を求めよ。

[1] $a < 0$ のとき

頂点 $x = a$ のとき

また $x = 0$ のとき

また $x = 4$ のとき

$x = 0$ のとき

最大値は $x = 0$ のときより

$$y = -0^2 + 2a \cdot 0 + a = a$$

[2] $0 \leq a \leq 4$ のとき

頂点 $x = a$ のとき

また $x = 0$ のとき

また $x = 4$ のとき

$x = a$ のとき

最大値は頂点 $x = a$ のときより

$$y = a^2 + a$$

[3] $4 < a$ のとき

頂点 $x = a$ のとき

また $x = 0$ のとき

また $x = 4$ のとき

$x = 4$ のとき

最大値は $x = 4$ のときより

$$y = -4^2 + 2a \cdot 4 + a$$

$$= -16 + 8a + a$$

$$= 9a - 16$$

(3) $0 \leq x \leq 4$ のとき、最小値を求めよ。

$0 \leq x \leq 4$ のとき $x = 2$

[1] $a < 2$ のとき

頂点 $x = a$ のとき

また $x = 0$ のとき

また $x = 4$ のとき

$x = 4$ のとき

最小値は $9a - 16$

[2] $a = 2$ のとき

頂点 $x = a$ のとき

また $x = 0$ のとき

また $x = 4$ のとき

$x = 0, 2$ のとき

$$a = 2$$

$$y = -x^2 + 4x + 2$$

$$x = 0 \text{ のとき } y = 2$$

[3] $2 < a$ のとき

頂点 $x = a$ のとき

また $x = 0$ のとき

また $x = 4$ のとき

$x = 0$ のとき

最小値は a

注意

- $a < 0$ のとき $a(x=0)$
- $0 \leq a \leq 4$ のとき $a^2 + a(x=a)$
- $4 < a$ のとき $9a - 16(x=4)$

注意

- $a < 2$ のとき $9a - 16(x=4)$
- $a = 2$ のとき $2(x=0, 4)$
- $2 < a$ のとき $a(x=a)$