統一テスト（２次関数）Ｒ２．８．２４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 2次関数 $y=-x^2-3x+1$ のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

$\boxed{2}$ 放物線 $y=x^2-3x+2$ は，放物線 $y=x^2+x+1$ を x 軸方向に ${}^{ア}\boxed{}$，y 軸方向に ${}^{イ}\boxed{}$ だけ平行移動したものである。$\boxed{}$ に適する値を求めよ。

$\boxed{3}$ ある放物線を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した後，x 軸に関して対称移動したところ，放物線 $y=-x^2-3x+3$ となった。もとの放物線の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。　$y=-x^2-8x$ $(-1\leqq x<2)$

$\boxed{5}$ 関数 $y=x^2-4x+c$ $(1\leqq x\leqq 5)$ の最大値が 8 であるように定数 c の値を定めよ。

$\boxed{6}$ 関数 $y=ax+b$ $(-1\leqq x\leqq 5)$ の値域が，$1\leqq y\leqq 13$ となるような定数 a，b の値を求めよ。ただし，$a<0$ とする。

$\boxed{7}$ x の 2 次関数 $y=x^2-mx+m$ の最小値を k とする。

(1) k を m の式で表せ。

(2) k の値を最大にする m の値と，k の最大値を求めよ。

$\boxed{8}$ a は定数とする。関数 $y=x^2-2ax+a^2+1$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最小値を，次の場合について，それぞれ求めよ。

(1) $a<0$　　(2) $0\leqq a\leqq 2$　　(3) $2<a$

$\boxed{9}$ 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 $(1,\ 2)$ で，点 $(0,\ 4)$ を通る。

(2) 軸が直線 $x=-3$ で，2 点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ -15)$ を通る。

$\boxed{10}$ 2 次関数のグラフが3 点$(-1,\ 6)$，$(1,\ -2)$，$(2,\ 3)$を通るとき，その 2 次関数を求めよ。

$\boxed{11}$ 放物線 $y=x^2$ を平行移動した曲線で，点 $(2,\ 3)$ を通り，頂点が直線 $y=x+1$ 上にある放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

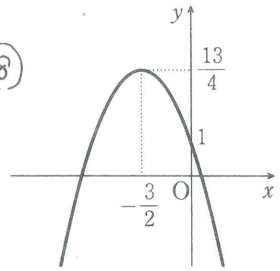
$\boxed{12}$ a は定数とする。関数 $y=x^2-4x+3$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{13}$ $a>0$ とする。関数 $y=-x^2+2(a+2)x-2a^2$ $(a \leqq x \leqq 2a)$ の最大値が 6 であるとき，a の値を求めよ。

1　2次関数 $y=-x^2-3x+1$ のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

解答　[図]，軸は直線 $x=-\frac{3}{2}$，頂点は点 $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{13}{4}\right)$　⑧

4　2　2



・x, y, 原点なし (−1)
・グラフの一部分がダメ → (−2)
(y切片がないなど)

解説
$-x^2-3x+1=-(x^2+3x)+1=-\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+1=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$

よって　$y=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$

したがって，グラフは上図。

軸は直線 $x=-\frac{3}{2}$，頂点は点 $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{13}{4}\right)$

2　放物線 $y=x^2-3x+2$ は，放物線 $y=x^2+x+1$ を x 軸方向に ア□，y 軸方向に イ□ だけ平行移動したものである。□ に適する値を求めよ。

解答　（ア）2　（イ）-1　⑥

解説
$y=x^2-3x+2$ を変形すると　$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$　2

$y=x^2+x+1$ を変形すると　$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$　2

放物線 $y=x^2+x+1$ の頂点 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$ を放物線 $y=x^2-3x+2$ の頂点 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$ に移動させればよい。

したがって，x 軸方向に ア2

y 軸方向に イ-1

3　ある放物線を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した後，x 軸に関して対称移動したところ，放物線 $y=-x^2-3x+3$ となった。もとの放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=x^2+5x+3$　$\left(y=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}\right)$　⑧

$y=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$　3

解説
放物線 $y=-x^2-3x+3$ を x 軸に関して対称移動すると

$-y=-x^2-3x+3$　すなわち　$y=x^2+3x-3$　3

この放物線を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものがもとの放物線である。よって，求める方程式は

$y-2=\{x-(-1)\}^2+3\{x-(-1)\}-3$

すなわち　$y=(x+1)^2+3(x+1)-1$

ゆえに　$y=x^2+5x+3$

4　次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。　$y=-x^2-8x$　$(-1\leqq x<2)$

解答　$x=-1$ で最大値 7，最小値はない　⑦

最小値 −20 (x=2)
(最小値なしと言ってない)
5

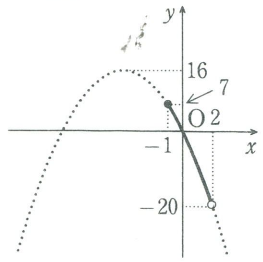
解説
$y=-x^2-8x$ を変形すると

$y=-(x+4)^2+16$　2

$-1\leqq x<2$ でのグラフは図の実線部分である。

よって，y は $x=-1$ で最大値 7 をとる。

最小値はない。



5　関数 $y=x^2-4x+c$ $(1\leqq x\leqq 5)$ の最大値が 8 であるように定数 c の値を定めよ。

解答　$c=3$　⑦

解説
$y=x^2-4x+c$ を変形すると

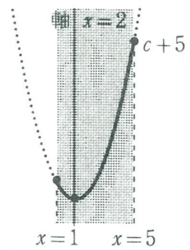
$y=(x-2)^2+c-4$　2

$1\leqq x\leqq 5$ であるから，y は $x=5$ で最大値をとる。

$x=5$ のとき

$y=5^2-4\cdot 5+c=c+5$

$c+5=8$　より　$c=3$



6　関数 $y=ax+b$ $(-1\leqq x\leqq 5)$ の値域が，$1\leqq y\leqq 13$ となるような定数 a，b の値を求めよ。ただし，$a<0$ とする。

解答　$a=-2$，$b=11$　⑦　片方のみあってる 3

解説
$a<0$ より，この関数のグラフは右下がりの直線の一部である。

よって，$f(x)=ax+b$ とすると，値域は

$f(5)\leqq y\leqq f(-1)$　すなわち　$5a+b\leqq y\leqq -a+b$

これが $1\leqq y\leqq 13$ と一致するから

$5a+b=1$，$-a+b=13$

これを解いて　$a=-2$，$b=11$

これは $a<0$ を満たす。

7　x の 2 次関数 $y=x^2-mx+m$ の最小値を k とする。
(1)　k を m の式で表せ。
(2)　k の値を最大にする m の値と，k の最大値を求めよ。

解答　(1)　$k=-\frac{m^2}{4}+m$　(2)　$m=2$ で最大値 1　⑧（各4）

解説
(1)　$x^2-mx+m=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+m$　2

よって，2次関数 $y=x^2-mx+m$ は，$x=\frac{m}{2}$ で最小値 $-\frac{m^2}{4}+m$ をとる。

したがって　$k=-\frac{m^2}{4}+m$

(2)　$k=-\frac{m^2}{4}+m=-\frac{1}{4}(m-2)^2+1$　2

よって，$k=-\frac{m^2}{4}+m$ は，$m=2$ で最大値 1 をとる。

8　a は定数とする。関数 $y=x^2-2ax+a^2+1$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最小値を，次の場合について，それぞれ求めよ。
(1)　$a<0$　(2)　$0\leqq a\leqq 2$　(3)　$2<a$

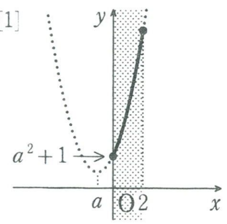
解答　(1)　$x=0$ で最小値 a^2+1　(2)　$x=a$ で最小値 1　(3)　$x=2$ で最小値 a^2-4a+5　⑨（各3）

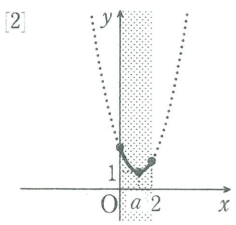
解説
この関数の式を変形すると　$y=(x-a)^2+1$　$(0\leqq x\leqq 2)$

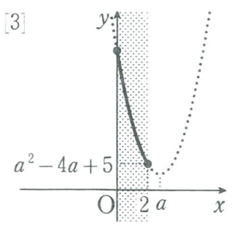
(1)　$a<0$ のとき
この関数のグラフは図[1]の実線部分である。
よって，y は $x=0$ で最小値 a^2+1 をとる。

(2)　$0\leqq a\leqq 2$ のとき
この関数のグラフは図[2]の実線部分である。
よって，y は $x=a$ で最小値 1 をとる。

(3)　$2<a$ のとき
この関数のグラフは図[3]の実線部分である。
よって，y は $x=2$ で最小値 a^2-4a+5 をとる。

[1]


[2]


[3]


/60

9 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 $(1,\ 2)$ で，点 $(0,\ 4)$ を通る。

(2) 軸が直線 $x=-3$ で，2点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ -15)$ を通る。

解答 (1) $y=2(x-1)^2+2$ $(y=2x^2-4x+4)$

(2) $y=-(x+3)^2+1$ $(y=-x^2-6x-8)$ 8 (3・4)

解説

(1) 頂点が点 $(1,\ 2)$ であるから，この2次関数は $y=a(x-1)^2+2$ の形に表される。

グラフが点 $(0,\ 4)$ を通るから　$4=a(0-1)^2+2$

よって　$a=2$ 2　上車がない各多し

ゆえに　$y=2(x-1)^2+2$ $(y=2x^2-4x+4)$

(2) 軸が直線 $x=-3$ であるから，この2次関数は $y=a(x+3)^2+q$ の形に表される。

グラフが点 $(-2,\ 0)$ を通るから　$0=a(-2+3)^2+q$

点 $(1,\ -15)$ を通るから　$-15=a(1+3)^2+q$

よって　$a+q=0$，$16a+q=-15$

これを解くと　$a=-1$，$q=1$ 2

ゆえに　$y=-(x+3)^2+1$ $(y=-x^2-6x-8)$

10 2次関数のグラフが3点 $(-1,\ 6)$，$(1,\ -2)$，$(2,\ 3)$ を通るとき，その2次関数を求めよ。

解答 $y=3x^2-4x-1$ 8

解説

求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

グラフが3点 $(-1,\ 6)$，$(1,\ -2)$，$(2,\ 3)$ を通るから

$a-b+c=6$ ……①

$a+b+c=-2$ ……②

$4a+2b+c=3$ ……③

②−① から　$2b=-8$　　ゆえに　$b=-4$ 2

$b=-4$ を①，③に代入して整理すると

$a+c=2$ ……④

$4a+c=11$ ……⑤

④，⑤を解くと　$a=3$，$c=-1$ 2

よって，求める2次関数は　$y=3x^2-4x-1$

11 放物線 $y=x^2$ を平行移動した曲線で，点 $(2,\ 3)$ を通り，頂点が直線 $y=x+1$ 上にある放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。 8

解答 $y=(x-1)^2+2$，$y=(x-2)^2+3$ $(y=x^2-2x+3,\ y=x^2-4x+7)$

解説

頂点が直線 $y=x+1$ 上にあるから，その座標は $(p,\ p+1)$ と表される。

また，放物線 $y=x^2$ を平行移動したものであるから，その方程式は

$y=(x-p)^2+p+1$ ……①

と表される。

このグラフが点 $(2,\ 3)$ を通るから　$(2-p)^2+p+1=3$

整理して　$p^2-3p+2=0$

よって　$(p-1)(p-2)=0$

ゆえに　$p=1,\ 2$ 4

①に代入して

$y=(x-1)^2+2$，$y=(x-2)^2+3$ $(y=x^2-2x+3,\ y=x^2-4x+7)$

2　2

12 a は定数とする。関数 $y=x^2-4x+3$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ の最大値を求めよ。

解答

$a<\frac{3}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-4a+3， 3

$a=\frac{3}{2}$ のとき　$x=\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$ で最大値 $-\frac{3}{4}$， 2

$\frac{3}{2}<a$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a 3

8

解説

$y=x^2-4x+3$ を変形すると　$y=(x-2)^2-1$

よって，この放物線の軸は直線 $x=2$，頂点は点 $(2,\ -1)$ である。

また，$x=a$ のとき　$y=a^2-4a+3$

$x=a+1$ のとき　$y=a^2-2a$

定義域の中央の値は　$a+\frac{1}{2}$

[1] $a+\frac{1}{2}<2$ すなわち $a<\frac{3}{2}$ のとき

この関数のグラフは図[1]の実線部分である。

よって，y は $x=a$ で最大値 a^2-4a+3 をとる。

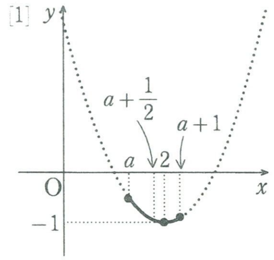
[2] $a+\frac{1}{2}=2$ すなわち $a=\frac{3}{2}$ のとき

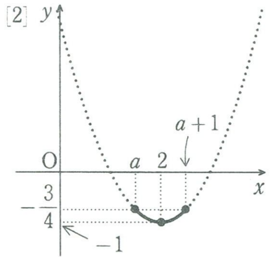
軸は定義域の中央にあり，$x=a$ と $x=a+1$ における y の値が一致する。

この関数のグラフは図[2]の実線部分である。

よって，y は $x=\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$ で最大値 $-\frac{3}{4}$ をとる。

[2]
・最大となる x を言ってないのはダメ
・a が残ってる解答はダメ





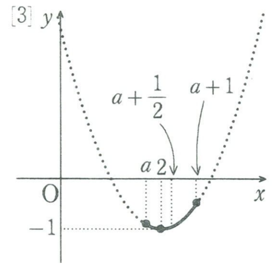
[3] $2<a+\frac{1}{2}$ すなわち $\frac{3}{2}<a$ のとき

この関数のグラフは図[3]の実線部分である。

よって，y は

$x=a+1$ で最大値 a^2-2a

をとる。



[1]〜[3]から

$a<\frac{3}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-4a+3

$a=\frac{3}{2}$ のとき　$x=\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$ で最大値 $-\frac{3}{4}$

$\frac{3}{2}<a$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a

13 $a>0$ とする。関数 $y=-x^2+2(a+2)x-2a^2$ $(a\leqq x\leqq 2a)$ の最大値が6であるとき，a の値を求めよ。

解答 $a=1,\ 2+\sqrt{2}$ 8 平方完成できない各多し.

解説

$y=-x^2+2(a+2)x-2a^2=-\{x^2-2(a+2)x\}-2a^2=-[\{x-(a+2)\}^2-(a+2)^2]-2a^2$

$=-\{x-(a+2)\}^2+(a+2)^2-2a^2=-\{x-(a+2)\}^2-a^2+4a+4$ 2

軸が直線 $x=a+2$ で，上に凸の放物線となる。

軸が定義域の中に入るかどうかで場合分けをする。ここで，a よりも $a+2$ の方が大きいから軸 $x=a+2$ は定義域の左端 $x=a$ よりも右側にある。

[1] $a+2\leqq 2a$ （つまり $2\leqq a$ ）のとき

軸 $x=a+2$ は定義域の右端 $x=2a$ よりも左側にある。つまり軸は定義域内にある。

グラフより $x=a+2$ で最大

最大値は頂点の y 座標より　$y=-a^2+4a+4$

最大値が6であるから，　$-a^2+4a+4=6$　よって　$a^2-4a+2=0$

解の公式より　$a=2\pm\sqrt{2}$　$2\leqq a$ を満たすのは　$a=2+\sqrt{2}$ 3

[2] $2a<a+2$ （つまり $0<a<2$ ）のとき

軸 $x=a+2$ は定義域の右端 $x=2a$ よりも右側にある。

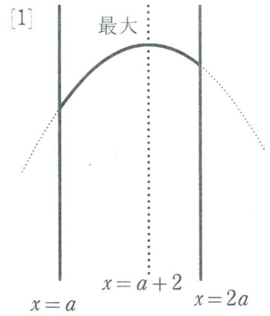
つまり軸は定義域よりも右側にある。　$a<2$ … −1

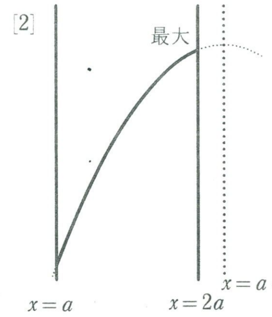
グラフより $x=2a$ で最大

最大値は $x=2a$ を代入して　$y=-(2a)^2+2(a+2)\cdot 2a-2a^2=-2a^2+8a$

最大値が6であるから，　$-2a^2+8a=6$　よって　$a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$ より　$a=1,\ 3$　$0<a<2$ を満たすのは　$a=1$ 3





[1]，[2]から　$a=1,\ 2+\sqrt{2}$

/40