数学演習（２次関数）Ｒ２．８．１９　　(　)組(　)番　名前(　　　　)

$\boxed{1}$ 関数 $y=2x^2+4x+5$ $(-3<x<0)$ に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

$\boxed{2}$ 実数 x，y が $2x+y=5$ を満たしながら変化するとき，x^2+y^2 の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 2 次関数 $y=3x^2+x-7$ のグラフの，次の直線または点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式を求めよ。

(1) x 軸　(2) y 軸　(3) 原点

$\boxed{4}$ ある放物線を原点に関して対称移動し，更に x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，放物線 $y=3x^2-6x+5$ に移るという。もとの放物線の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$ $a>0$ とする。関数 $y=ax^2-4ax+b$ $(1\leqq x\leqq 5)$ の最大値が 7 で，最小値が -2 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{6}$ x の 2 次関数 $y=x^2-mx+m$ の最小値を k とする。

(1) k を m の式で表せ。

(2) k の値を最大にする m の値と，k の最大値を求めよ。

$\boxed{7}$ $a>0$ とする。関数 $y=x^2-2x-1$ $(0\leqq x\leqq a)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。　(2) 最大値を求めよ。

$\boxed{8}$ a は定数とする。関数 $y=x^2-2ax+2a^2$ $(0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。　(2) 最大値を求めよ。

$\boxed{9}$ a は定数とする。関数 $y=x^2+6x+5$ $(a \leqq x \leqq a+2)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{10}$ a は定数とする。関数 $y=x^2-4x+3$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{11}$ 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1) 放物線 $y=2x^2-x+1$ を平行移動した曲線で，2 点 $(1,\ 2)$，$(-1,\ 6)$ を通る。

(2) 放物線 $y=x^2$ を平行移動した曲線で，点 $(2,\ 3)$ を通り，頂点が直線 $y=x+1$ 上にある。

$\boxed{12}$ a は定数とする。関数 $y=-x^2+4ax-a$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が 2 であるとき，a の値を求めよ。

$\boxed{13}$ 関数 $y=3x^2-6ax+2$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の最大値および最小値を，次の (1) ～ (5) の場合について求めよ。

(1) $a<0$　(2) $0 \leqq a<1$　(3) $a=1$　(4) $1<a \leqq 2$　(5) $a>2$

$\boxed{1}$ 関数 $y=2x^2+4x+5\ (-3<x<0)$ に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

解答　$x=-1$ で最小値 3，最大値はない

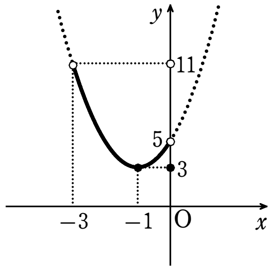
解説

$y=2x^2+4x+5$ を変形すると　　$y=2(x+1)^2+3$

$-3<x<0$ でのグラフは，右の図の実線部分である。

したがって，y は

$x=-1$ で最小値 3 をとる。最大値はない。



$\boxed{2}$ 実数 x，y が $2x+y=5$ を満たしながら変化するとき，x^2+y^2 の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

解答　$x=2$，$y=1$ で最小値 5

解説

$2x+y=5$ より，$y=-2x+5$ ……① であるから

$$x^2+y^2=x^2+(-2x+5)^2=5x^2-20x+25=5(x-2)^2+5$$

よって，x^2+y^2 は $x=2$ で最小値 5 をとる。

このとき，① から　　$y=-2\cdot2+5=1$

したがって，x^2+y^2 は $x=2$，$y=1$ で最小値 5 をとる。

$\boxed{3}$ 2 次関数 $y=3x^2+x-7$ のグラフの，次の直線または点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式を求めよ。

(1)　x 軸　　　　(2)　y 軸　　　　(3)　原点

解答　(1)　$y=-3x^2-x+7$　　(2)　$y=3x^2-x-7$　　(3)　$y=-3x^2+x+7$

解説

(1)　求める方程式は，x，y をそれぞれ x，$-y$ でおき換えたものであるから

$$-y=3x^2+x-7$$

すなわち　$y=-(3x^2+x-7)$

よって　$y=-3x^2-x+7$

(2)　求める方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，y でおき換えたものであるから

$$y=3(-x)^2+(-x)-7$$

よって　$y=3x^2-x-7$

(3)　求める方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，$-y$ でおき換えたものであるから

$$-y=3(-x)^2+(-x)-7$$

すなわち　$y=-\{3(-x)^2+(-x)-7\}$

よって　$y=-3x^2+x+7$

$\boxed{4}$ ある放物線を原点に関して対称移動し，更に x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，放物線 $y=3x^2-6x+5$ に移るという。もとの放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=-3x^2-18x-26$

解説

放物線 $y=3x^2-6x+5$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した放物線 C_2 の方程式は

$$y-(-3)=3(x-2)^2-6(x-2)+5$$

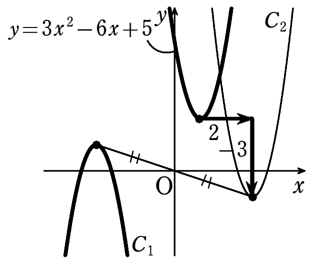
すなわち　$y=3x^2-18x+26$

放物線 C_2 を，原点に関して対称移動した放物線 C_1 の方程式は

$$-y=3(-x)^2-18(-x)+26$$

すなわち　$y=-3x^2-18x-26$

これが求めるもとの放物線の方程式である。



別解　$y=3x^2-6x+5=3(x-1)^2+2$ から，放物線 $y=3x^2-6x+5$ の頂点は　点 (1，2)

点 (1，2) を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した点は

点 $(1+2,\ 2-3)$　すなわち　点 $(3,\ -1)$

また，原点に関する対称移動により，点 $(3,\ -1)$ は点 $(-3,\ 1)$ に移り，放物線の x^2 の係数は -3 となる。

したがって，もとの放物線の方程式は

$$y=-3(x+3)^2+1\quad(y=-3x^2-18x-26\ \text{でもよい})$$

$\boxed{5}$ $a>0$ とする。関数 $y=ax^2-4ax+b\ (1\leqq x\leqq5)$ の最大値が 7 で，最小値が -2 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=1$，$b=2$

解説

$y=ax^2-4ax+b$ を変形すると　　$y=a(x-2)^2-4a+b$

$a>0$ であるから，$1\leqq x\leqq5$ において，y は $x=5$ で最大値をとり，$x=2$ で最小値をとる。

$x=5$ のとき

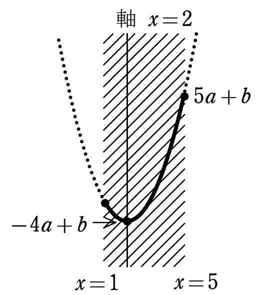
$$y=a\cdot5^2-4a\cdot5+b=5a+b$$

$x=2$ のとき　　$y=-4a+b$

よって　　$5a+b=7$，$-4a+b=-2$

これを解いて

$a=1$，$b=2$　（これは $a>0$ を満たす）



$\boxed{6}$ x の 2 次関数 $y=x^2-mx+m$ の最小値を k とする。

(1)　k を m の式で表せ。

(2)　k の値を最大にする m の値と，k の最大値を求めよ。

解答　(1)　$k=-\dfrac{m^2}{4}+m$　　(2)　$m=2$ で最大値 1

解説

(1)　$x^2-mx+m=\left(x-\dfrac{m}{2}\right)^2-\dfrac{m^2}{4}+m$

よって，2 次関数 $y=x^2-mx+m$ は，$x=\dfrac{m}{2}$ で最小値 $-\dfrac{m^2}{4}+m$ をとる。

したがって　　$k=-\dfrac{m^2}{4}+m$

(2)　$-\dfrac{m^2}{4}+m=-\dfrac{1}{4}(m-2)^2+1$

よって，$k=-\dfrac{m^2}{4}+m$ は，$m=2$ で最大値 1 をとる。

$\boxed{7}$ $a>0$ とする。関数 $y=x^2-2x-1\ (0\leqq x\leqq a)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　　　(2)　最大値を求めよ。

解答　(1)　$0<a<1$ のとき $x=a$ で最小値 a^2-2a-1，

$1\leqq a$ のとき $x=1$ で最小値 -2

(2)　$0<a<2$ のとき $x=0$ で最大値 -1；

$a=2$ のとき $x=0$，2 で最大値 -1；

$2<a$ のとき $x=a$ で最大値 a^2-2a-1

解説

関数の式を変形すると　　$y=(x-1)^2-2\quad(0\leqq x\leqq a)$

(1)　[1]　$0<a<1$ のとき

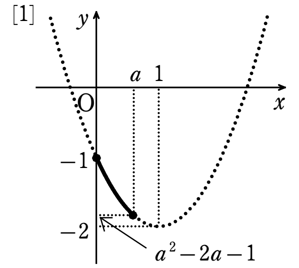
関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

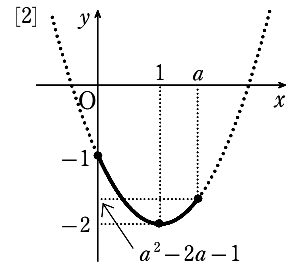
よって，y は $x=a$ で最小値 a^2-2a-1 をとる。

[2]　$1\leqq a$ のとき

関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって，y は $x=1$ で最小値 -2 をとる。





[1]，[2] から

$0<a<1$ のとき　　$x=a$ で最小値 a^2-2a-1

$1\leqq a$ のとき　　$x=1$ で最小値 -2

(2)　[1]　$0<a<2$ のとき

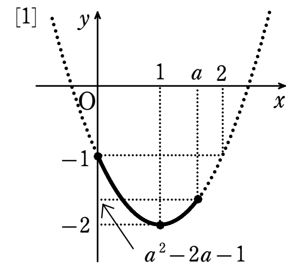
関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

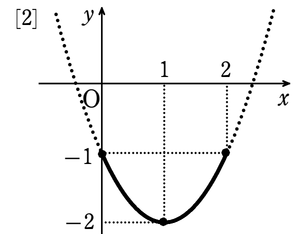
よって，y は $x=0$ で最大値 -1 をとる。

[2]　$a=2$ のとき

関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって，y は $x=0$，2 で最大値 -1 をとる。





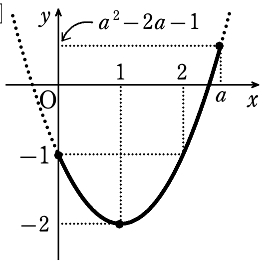
[3]　$2<a$ のとき

関数のグラフは図[3]の実線部分である。

よって，y は

$x=a$ で最大値 a^2-2a-1

をとる。

[3]


[1]～[3]から

$0<a<2$ のとき　　$x=0$ で最大値 -1

$a=2$ のとき　　$x=0$，2 で最大値 -1

$2<a$ のとき　　$x=a$ で最大値 a^2-2a-1

$\boxed{8}$ a は定数とする。関数 $y=x^2-2ax+2a^2$ $(0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

解答　(1)　$a<0$ のとき　$x=0$ で最小値 $2a^2$，

$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2，

$2<a$ のとき　$x=2$ で最小値 $2a^2-4a+4$

(2)　$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $2a^2-4a+4$

$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最大値 2

$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 $2a^2$

解説

関数の式を変形すると　　$y=(x-a)^2+a^2$　$(0\leqq x\leqq 2)$

この関数のグラフの軸は　直線 $x=a$

(1)　[1]　$a<0$ のとき

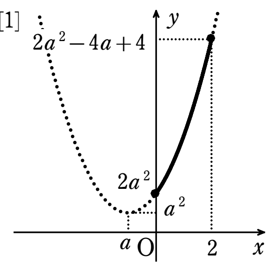
関数のグラフは図[1]の実線部分である。

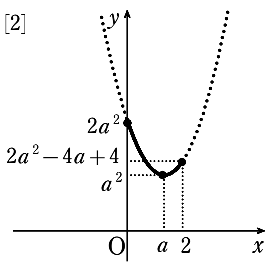
よって，y は $x=0$ で最小値 $2a^2$ をとる。

[2]　$0\leqq a\leqq 2$ のとき

関数のグラフは図[2]の実線部分である。

よって，y は $x=a$ で最小値 a^2 をとる。

[1]


[2]


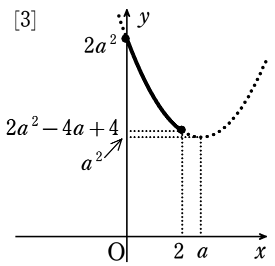
[3]　$2<a$ のとき

関数のグラフは図[3]の実線部分である。

よって，y は

$x=2$ で最小値 $2a^2-4a+4$

をとる。

[3]


[1]～[3]から

$a<0$ のとき　　$x=0$ で最小値 $2a^2$

$0\leqq a\leqq 2$ のとき　　$x=a$ で最小値 a^2

$2<a$ のとき　　$x=2$ で最小値 $2a^2-4a+4$

(2)　[1]　$a<1$ のとき

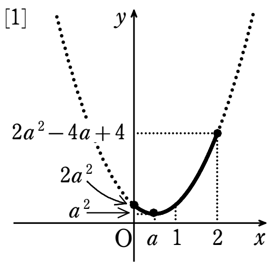
関数のグラフは図[1]の実線部分である。

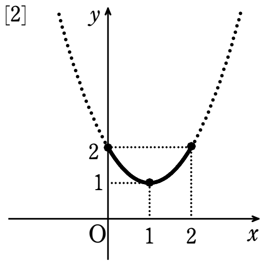
よって，y は $x=2$ で最大値 $2a^2-4a+4$ をとる。

[2]　$a=1$ のとき

関数のグラフは図[2]の実線部分である。

よって，y は $x=0$，2 で最大値 2 をとる。

[1]


[2]


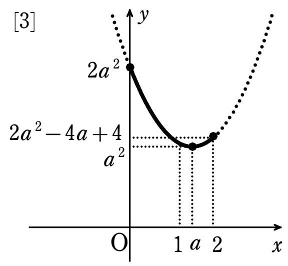
[3]　$1<a$ のとき

関数のグラフは図[3]の実線部分である。

よって，y は

$x=0$ で最大値 $2a^2$

をとる。

[3]


[1]～[3]から

$a<1$ のとき　　$x=2$ で最大値 $2a^2-4a+4$

$a=1$ のとき　　$x=0$，2 で最大値 2

$1<a$ のとき　　$x=0$ で最大値 $2a^2$

$\boxed{9}$ a は定数とする。関数 $y=x^2+6x+5$ $(a\leqq x\leqq a+2)$ の最小値を求めよ。

解答　$a<-5$ のとき　$x=a+2$ で最小値 $a^2+10a+21$

$-5\leqq a\leqq -3$ のとき　$x=-3$ で最小値 -4

$-3<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2+6a+5

解説

$y=x^2+6x+5$ を変形すると　　$y=(x+3)^2-4$

よって，この放物線の軸は直線 $x=-3$，頂点は点 $(-3,\ -4)$ である。

また，$x=a$ のとき　　　$y=a^2+6a+5$

$x=a+2$ のとき　　$y=a^2+10a+21$

[1]　$a+2<-3$ すなわち $a<-5$ のとき

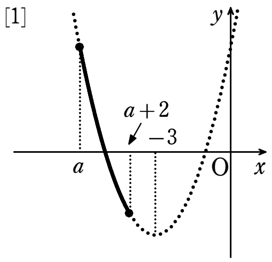
この関数のグラフは図[1]の実線部分である。

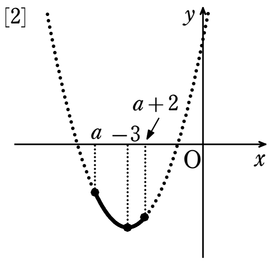
よって，y は $x=a+2$ で最小値 $a^2+10a+21$ をとる。

[2]　$a\leqq -3\leqq a+2$ すなわち $-5\leqq a\leqq -3$ のとき

この関数のグラフは図[2]の実線部分である。

よって，y は $x=-3$ で最小値 -4 をとる。

[1]


[2]


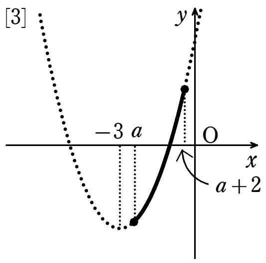
[3]　$-3<a$ のとき

この関数のグラフは図[3]の実線部分である。

よって，y は

$x=a$ で最小値 a^2+6a+5

をとる。

[3]


[1]～[3]から

$a<-5$ のとき　　$x=a+2$ で最小値 $a^2+10a+21$

$-5\leqq a\leqq -3$ のとき　　$x=-3$ で最小値 -4

$-3<a$ のとき　　$x=a$ で最小値 a^2+6a+5

$\boxed{10}$ a は定数とする。関数 $y=x^2-4x+3$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ の最大値を求めよ。

解答　$a<\dfrac{3}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-4a+3，

$a=\dfrac{3}{2}$ のとき　$x=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}$ で最大値 $-\dfrac{3}{4}$，

$\dfrac{3}{2}<a$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a

解説

$y=x^2-4x+3$ を変形すると　　$y=(x-2)^2-1$

よって，この放物線の軸は直線 $x=2$，頂点は点 $(2,\ -1)$ である。

また，$x=a$ のとき　　　$y=a^2-4a+3$

$x=a+1$ のとき　　$y=a^2-2a$

定義域の中央の値は　　$a+\dfrac{1}{2}$

[1]　$a+\dfrac{1}{2}<2$ すなわち $a<\dfrac{3}{2}$ のとき

この関数のグラフは図[1]の実線部分である。

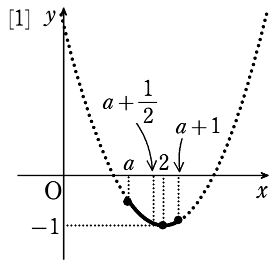
よって，y は $x=a$ で最大値 a^2-4a+3 をとる。

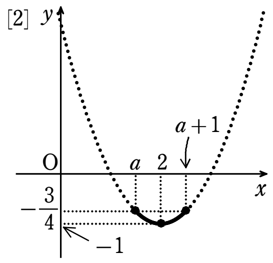
[2]　$a+\dfrac{1}{2}=2$ すなわち $a=\dfrac{3}{2}$ のとき

軸は定義域の中央にあり，$x=a$ と $x=a+1$ における y の値が一致する。

この関数のグラフは図[2]の実線部分である。

よって，y は $x=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}$ で最大値 $-\dfrac{3}{4}$ をとる。





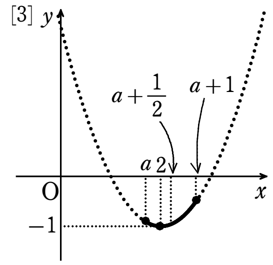
[3]　$2<a+\frac{1}{2}$ すなわち $\frac{3}{2}<a$ のとき

この関数のグラフは図[3]の実線部分である。

よって，y は

$x=a+1$ で最大値 a^2-2a

をとる。



[1]～[3]から

$a<\frac{3}{2}$ のとき　　$x=a$ で最大値 a^2-4a+3

$a=\frac{3}{2}$ のとき　　$x=\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$ で最大値 $-\frac{3}{4}$

$\frac{3}{2}<a$ のとき　　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a

$\boxed{11}$ 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

(1)　放物線 $y=2x^2-x+1$ を平行移動した曲線で，2点 $(1,\ 2)$，$(-1,\ 6)$ を通る。

(2)　放物線 $y=x^2$ を平行移動した曲線で，点 $(2,\ 3)$ を通り，頂点が直線 $y=x+1$ 上にある。

解答　(1)　$y=2x^2-2x+2$

(2)　$y=(x-1)^2+2$，$y=(x-2)^2+3$　$(y=x^2-2x+3,\ y=x^2-4x+7)$

解説

(1)　求める2次関数は $y=2x^2+bx+c$ と表される。

このグラフが2点 $(1,\ 2)$，$(-1,\ 6)$ を通るから

$2=2+b+c$，$6=2-b+c$

すなわち　　$b+c=0$，$b-c=-4$

これを解くと　　$b=-2$，$c=2$

よって，求める2次関数は　　$y=2x^2-2x+2$

(2)　頂点が直線 $y=x+1$ 上にあるから，その座標は $(p,\ p+1)$ と表される。

また，放物線 $y=x^2$ を平行移動したものであるから，その方程式は

$y=(x-p)^2+p+1$　……①

と表される。

このグラフが点 $(2,\ 3)$ を通るから　　$(2-p)^2+p+1=3$

整理して　　$p^2-3p+2=0$

よって　　$(p-1)(p-2)=0$

ゆえに　　$p=1,\ 2$

①に代入して

$y=(x-1)^2+2$，$y=(x-2)^2+3$　$(y=x^2-2x+3,\ y=x^2-4x+7)$

$\boxed{12}$ a は定数とする。関数 $y=-x^2+4ax-a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値が2であるとき，a の値を求めよ。

解答　$a=-2,\ \frac{1+\sqrt{33}}{8}$

解説

$y=-x^2+4ax-a$ を変形すると　　$y=-(x-2a)^2+4a^2-a$

この関数のグラフの軸は　　直線 $x=2a$

[1]　$2a<0$ すなわち $a<0$ のとき

関数のグラフは図[1]の実線部分である。

よって，y は $x=0$ で最大値 $-a$ をとる。

最大値が2であるから　$-a=2$　より　$a=-2$　（これは $a<0$ を満たす）

[2]　$0\leqq 2a\leqq 2$ すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき

関数のグラフは図[2]の実線部分である。

よって，y は $x=2a$ で最大値 $4a^2-a$ をとる。

最大値が2であるから $4a^2-a=2$　より　$4a^2-a-2=0$

解の公式より　$a=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 4\cdot(-2)}}{2\cdot 4}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$

$0\leqq a\leqq 1$ を満たすのは　$a=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$

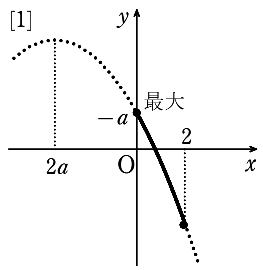
[3]　$2<2a$ すなわち $1<a$ のとき

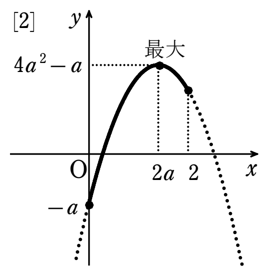
関数のグラフは図[3]の実線部分である。

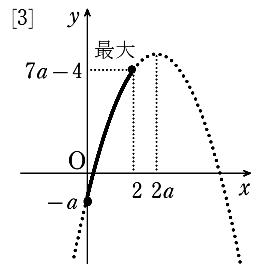
よって，y は $x=2$ で最大値 $-2^2+4a\cdot 2-a=7a-4$ をとる。

最大値が2であるから　$7a-4=2$　より　$a=\frac{6}{7}$

しかしこれは $a>1$ を満たさない。







以上より　$a=-2,\ \frac{1+\sqrt{33}}{8}$

$\boxed{13}$ 関数 $y=3x^2-6ax+2$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値および最小値を，次の(1)～(5)の場合について求めよ。

(1)　$a<0$　　(2)　$0\leqq a<1$　　(3)　$a=1$　　(4)　$1<a\leqq 2$　　(5)　$a>2$

解答　(1)　$x=2$ で最大値 $14-12a$，$x=0$ で最小値2

(2)　$x=2$ で最大値 $14-12a$，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$

(3)　$x=0$，2で最大値2，$x=1$ で最小値 -1

(4)　$x=0$ で最大値2，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$

(5)　$x=0$ で最大値2，$x=2$ で最小値 $14-12a$

解説

$y=3x^2-6ax+2$ を変形すると　　$y=3(x-a)^2-3a^2+2$

この関数のグラフの軸は　直線 $x=a$

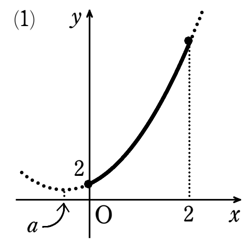
また，$x=0$ のとき　　$y=2$

$x=2$ のとき　　$y=14-12a$

$x=a$ のとき　　$y=-3a^2+2$

(1)　$a<0$ のとき

$x=2$ で最大値 $14-12a$，$x=0$ で最小値2をとる。

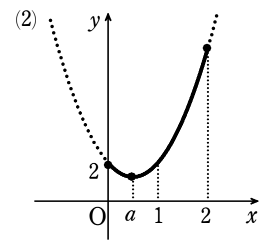


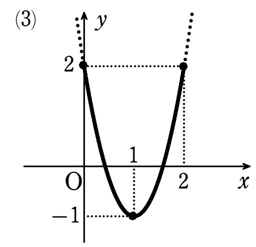
(2)　$0\leqq a<1$ のとき

$x=2$ で最大値 $14-12a$，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$ をとる。

(3)　$a=1$ のとき

$x=0$，2で最大値2，$x=1$ で最小値 -1 をとる。



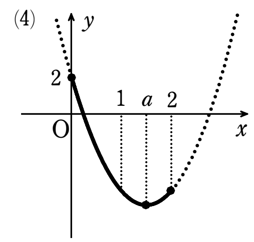


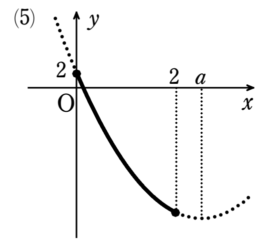
(4)　$1<a\leqq 2$ のとき

$x=0$ で最大値2，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$ をとる。

(5)　$a>2$ のとき

$x=0$ で最大値2，$x=2$ で最小値 $14-12a$ をとる。



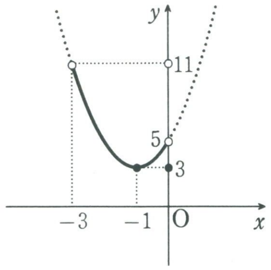


数学演習（2次関数）R2．8．19　平方完成して，2乗のない者多し　動きを正にしていない者多し　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1 関数 $y=2x^2+4x+5\ (-3<x<0)$ に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

解答　$x=-1$ で最小値 3，最大値はない　← そのときのxの値を書くこと。

解説
$y=2x^2+4x+5$ を変形すると　$y=2(x+1)^2+3$
$-3<x<0$ でのグラフは，右の図の実線部分である。
したがって，y は
$x=-1$ で最小値 3 をとる。最大値はない。



最大がないならば「最大値なし」と書く

2 実数 x，y が $2x+y=5$ を満たしながら変化するとき，x^2+y^2 の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

解答　$x=2$，$y=1$ で最小値 5　← 5で割る者がいた。

解説
$2x+y=5$ より，$y=-2x+5$ ……① であるから
$x^2+y^2=x^2+(-2x+5)^2=5x^2-20x+25=5(x-2)^2+5$　この式を作ること。
よって，x^2+y^2 は $x=2$ で最小値 5 をとる。
このとき，① から　$y=-2\cdot2+5=1$
したがって，x^2+y^2 は $x=2$，$y=1$ で最小値 5 をとる。

3 2次関数 $y=3x^2+x-7$ のグラフの，次の直線または点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式を求めよ。
(1) x 軸　(2) y 軸　(3) 原点

「$y=$」がない者がいる。　(1)(3)でx^2の係数が違う。

公式を使った方が良い

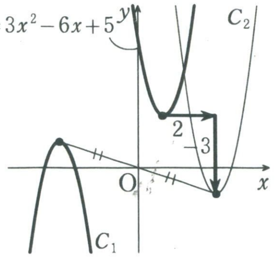
解答　(1) $y=-3x^2-x+7$　(2) $y=3x^2-x-7$　(3) $y=-3x^2+x+7$

解説
(1) 求める方程式は，x，y をそれぞれ x，$-y$ でおき換えたものであるから
$-y=3x^2+x-7$
すなわち　$y=-(3x^2+x-7)$　$y=-3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{85}{12}$
よって　$y=-3x^2-x+7$
(2) 求める方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，y でおき換えたものであるから
$y=3(-x)^2+(-x)-7$　$y=3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{85}{12}$
よって　$y=3x^2-x-7$
(3) 求める方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，$-y$ でおき換えたものであるから
$-y=3(-x)^2+(-x)-7$
すなわち　$y=-\{3(-x)^2+(-x)-7\}$　$y=-3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{85}{12}$
よって　$y=-3x^2+x+7$

4 ある放物線を原点に関して対称移動し，更に x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，放物線 $y=3x^2-6x+5$ に移るという。もとの放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=-3x^2-18x-26$　$\left(y=-3(x+3)^2+1\right)$

解説
放物線 $y=3x^2-6x+5$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した放物線 C_2 の方程式は
$y-(-3)=3(x-2)^2-6(x-2)+5$
すなわち　$y=3x^2-18x+26$
放物線 C_2 を，原点に関して対称移動した放物線 C_1 の方程式は
$-y=3(-x)^2-18(-x)+26$
すなわち　$y=-3x^2-18x-26$
これが求めるもとの放物線の方程式である。



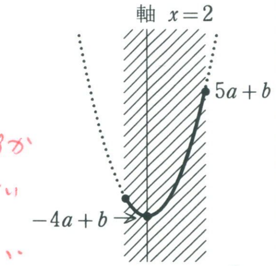
別解　$y=3x^2-6x+5=3(x-1)^2+2$ から，放物線 $y=3x^2-6x+5$ の頂点は　点 $(1,\ 2)$
点 $(1,\ 2)$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した点は
点 $(1+2,\ 2-3)$　すなわち　点 $(3,\ -1)$
また，原点に関する対称移動により，点 $(3,\ -1)$ は点 $(-3,\ 1)$ に移り，放物線の x^2 の係数は -3 となる。　これができていない。
したがって，もとの放物線の方程式は
$y=-3(x+3)^2+1$　($y=-3x^2-18x-26$ でもよい)

5 $a>0$ とする。関数 $y=ax^2-4ax+b\ (1\leqq x\leqq5)$ の最大値が 7 で，最小値が -2 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=1$，$b=2$　ここのミスも多い

解説
$y=ax^2-4ax+b$ を変形すると　$y=a(x-2)^2-4a+b$
$a>0$ であるから，$1\leqq x\leqq5$ において，y は $x=5$ で最大値をとり，$x=2$ で最小値をとる。
$x=5$ のとき
$y=a\cdot5^2-4a\cdot5+b=5a+b$
$x=2$ のとき　$y=-4a+b$
よって　$5a+b=7$，$-4a+b=-2$
これを解いて
$a=1$，$b=2$　(これは $a>0$ を満たす)

どこで最小になるか求めていない者が多い



6 x の2次関数 $y=x^2-mx+m$ の最小値を k とする。
(1) k を m の式で表せ。
(2) k の値を最大にする m の値と，k の最大値を求めよ。

解答　(1) $k=-\frac{m^2}{4}+m$　(2) $m=2$ で最大値 1

解説
(1) $x^2-mx+m=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+m$
よって，2次関数 $y=x^2-mx+m$ は，$x=\frac{m}{2}$ で最小値 $-\frac{m^2}{4}+m$ をとる。
したがって　$k=-\frac{m^2}{4}+m$
(2) $-\frac{m^2}{4}+m=-\frac{1}{4}(m-2)^2+1$
よって，$k=-\frac{m^2}{4}+m$ は，$m=2$ で最大値 1 をとる。

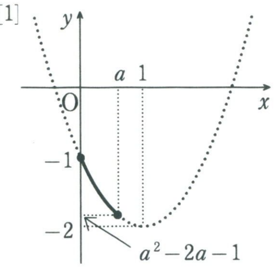
7 $a>0$ とする。関数 $y=x^2-2x-1\ (0\leqq x\leqq a)$ について，次の問いに答えよ。
(1) 最小値を求めよ。　(2) 最大値を求めよ。

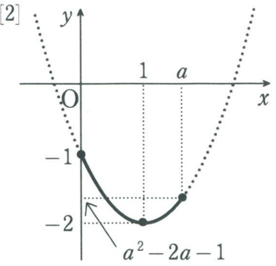
解答　(1) $0<a<1$ のとき $x=a$ で最小値 a^2-2a-1，
$1\leqq a$ のとき $x=1$ で最小値 -2
(2) $0<a<2$ のとき $x=0$ で最大値 -1；
$a=2$ のとき $x=0$，2 で最大値 -1；
$2<a$ のとき $x=a$ で最大値 a^2-2a-1

$a<1$ となっている者多し

そもそも場合分けに気付かない者も多い。

解説
関数の式を変形すると　$y=(x-1)^2-2\ (0\leqq x\leqq a)$
(1) [1] $0<a<1$ のとき
関数のグラフは図[1]の実線部分である。
よって，y は $x=a$ で最小値 a^2-2a-1 をとる。
[2] $1\leqq a$ のとき
関数のグラフは図[2]の実線部分である。
よって，y は $x=1$ で最小値 -2 をとる。

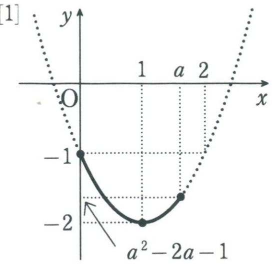
[1]


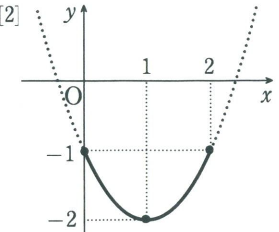
[2]


[1]，[2] から
$0<a<1$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-2a-1
$1\leqq a$ のとき　$x=1$ で最小値 -2

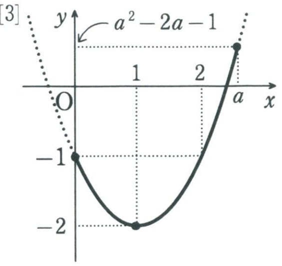
(2) [1] $0<a<2$ のとき
関数のグラフは図[1]の実線部分である。
よって，y は $x=0$ で最大値 -1 をとる。
[2] $a=2$ のとき
関数のグラフは図[2]の実線部分である。
よって，y は $x=0$，2 で最大値 -1 をとる。

$x=0$　$x=a$
中央 $x=\frac{a}{2}$
中央を用いた別解もある。

[1]


[2]


[3] $2<a$ のとき
関数のグラフは図[3]の実線部分である。
よって，y は
$x=a$ で最大値 a^2-2a-1
をとる。

[3]


[1]～[3] から

$0<a<2$ のとき　$x=0$ で最大値 -1
$a=2$ のとき　$x=0,\ 2$ で最大値 -1
$2<a$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-2a-1

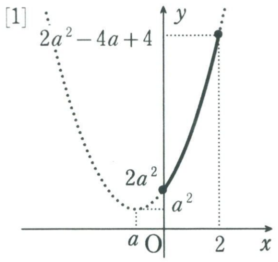
8 a は定数とする。関数 $y=x^2-2ax+2a^2\ (0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。
(1)　最小値を求めよ。　(2)　最大値を求めよ。

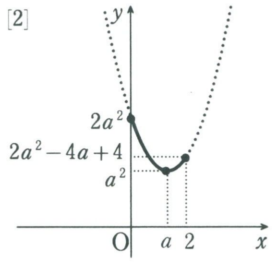
解答 (1) $a<0$ のとき　$x=0$ で最小値 $2a^2$，
$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2，
$2<a$ のとき　$x=2$ で最小値 $2a^2-4a+4$
(2) $a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $2a^2-4a+4$
$a=1$ のとき　$x=0,\ 2$ で最大値 2
$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 $2a^2$

a=1なので
ここは数字になる
(文字aは残らない)

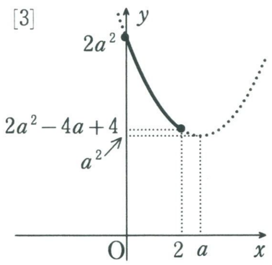
解説
関数の式を変形すると　$y=(x-a)^2+a^2\ (0\leqq x\leqq 2)$
この関数のグラフの軸は　直線 $x=a$
(1) [1]　$a<0$ のとき
関数のグラフは図 [1] の実線部分である。
よって，y は $x=0$ で最小値 $2a^2$ をとる。
[2]　$0\leqq a\leqq 2$ のとき
関数のグラフは図 [2] の実線部分である。
よって，y は $x=a$ で最小値 a^2 をとる。

場合分けの
問題と
気が付かない
者多し

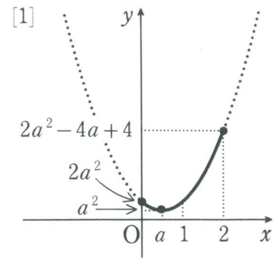


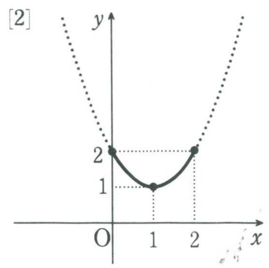


[3]　$2<a$ のとき
関数のグラフは図 [3] の実線部分である。
よって，y は
$x=2$ で最小値 $2a^2-4a+4$
をとる。

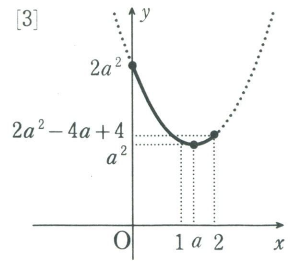


[1]～[3] から
$a<0$ のとき　$x=0$ で最小値 $2a^2$
$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2
$2<a$ のとき　$x=2$ で最小値 $2a^2-4a+4$
(2) [1]　$a<1$ のとき
関数のグラフは図 [1] の実線部分である。
よって，y は $x=2$ で最大値 $2a^2-4a+4$ をとる。
[2]　$a=1$ のとき
関数のグラフは図 [2] の実線部分である。
よって，y は $x=0,\ 2$ で最大値 2 をとる。





[3]　$1<a$ のとき
関数のグラフは図 [3] の実線部分である。
よって，y は
$x=0$ で最大値 $2a^2$
をとる。



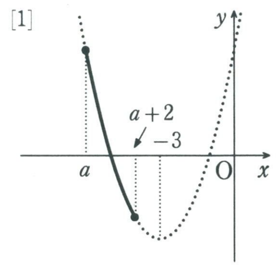
[1]～[3] から
$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $2a^2-4a+4$
$a=1$ のとき　$x=0,\ 2$ で最大値 2
$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 $2a^2$

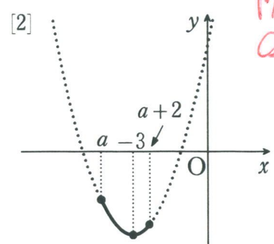
9 a は定数とする。関数 $y=x^2+6x+5\ (a\leqq x\leqq a+2)$ の最小値を求めよ。

解答 $a<-5$ のとき　$x=a+2$ で最小値 $a^2+10a+21$
$-5\leqq a\leqq -3$ のとき　$x=-3$ で最小値 -4
$-3<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2+6a+5

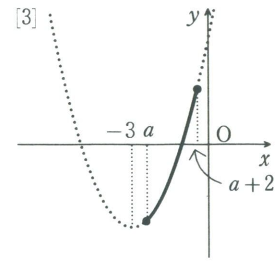
解説
$y=x^2+6x+5$ を変形すると　$y=(x+3)^2-4$
よって，この放物線の軸は直線 $x=-3$，頂点は点 $(-3,\ -4)$ である。
また，$x=a$ のとき　$y=a^2+6a+5$
$x=a+2$ のとき　$y=a^2+10a+21$
[1]　$a+2<-3$ すなわち $a<-5$ のとき
この関数のグラフは図 [1] の実線部分である。
よって，y は $x=a+2$ で最小値 $a^2+10a+21$ をとる。
[2]　$a\leqq -3\leqq a+2$ すなわち $-5\leqq a\leqq -3$ のとき
この関数のグラフは図 [2] の実線部分である。
よって，y は $x=-3$ で最小値 -4 をとる。

・$a+2<-3$
・$a\leqq-3\leqq a+2$
このままの解答
多し
解いて
aの範囲
を求めよ





[3]　$-3<a$ のとき
この関数のグラフは図 [3] の実線部分である。
よって，y は
$x=a$ で最小値 a^2+6a+5
をとる。



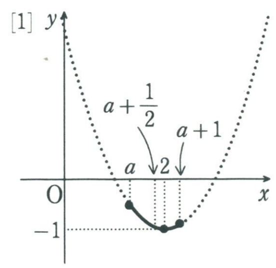
[1]～[3] から
$a<-5$ のとき　$x=a+2$ で最小値 $a^2+10a+21$
$-5\leqq a\leqq -3$ のとき　$x=-3$ で最小値 -4
$-3<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2+6a+5

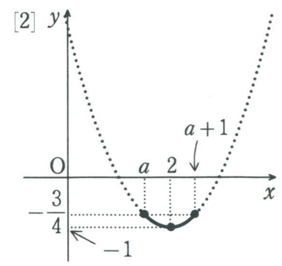
10 a は定数とする。関数 $y=x^2-4x+3\ (a\leqq x\leqq a+1)$ の最大値を求めよ。

解答 $a<\frac{3}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-4a+3，
$a=\frac{3}{2}$ のとき　$x=\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}$ で最大値 $-\frac{3}{4}$，
$\frac{3}{2}<a$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a

解説
$y=x^2-4x+3$ を変形すると　$y=(x-2)^2-1$
よって，この放物線の軸は直線 $x=2$，頂点は点 $(2,\ -1)$ である。
また，$x=a$ のとき　$y=a^2-4a+3$
$x=a+1$ のとき　$y=a^2-2a$
定義域の中央の値は　$a+\frac{1}{2}$
[1]　$a+\frac{1}{2}<2$ すなわち $a<\frac{3}{2}$ のとき
この関数のグラフは図 [1] の実線部分である。
よって，y は $x=a$ で最大値 a^2-4a+3 をとる。
[2]　$a+\frac{1}{2}=2$ すなわち $a=\frac{3}{2}$ のとき
軸は定義域の中央にあり，$x=a$ と $x=a+1$ における y の値が一致する。
この関数のグラフは図 [2] の実線部分である。
よって，y は $x=\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}$ で最大値 $-\frac{3}{4}$ をとる。

[2]で$a=\frac{3}{2}$であるが
aが残る者
がいる





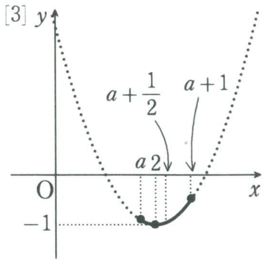
[3]　$2<a+\frac{1}{2}$　すなわち　$\frac{3}{2}<a$ のとき

この関数のグラフは図[3]の実線部分である。

よって，y は

$x=a+1$ で最大値 a^2-2a

をとる。



[1]～[3]から

$a<\frac{3}{2}$ のとき　　$x=a$ で最大値 a^2-4a+3

$a=\frac{3}{2}$ のとき　　$x=\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$ で最大値 $-\frac{3}{4}$

$\frac{3}{2}<a$ のとき　　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a

$\boxed{11}$ 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

(1)　放物線 $y=2x^2-x+1$ を平行移動した曲線で，2点 $(1,\ 2)$，$(-1,\ 6)$ を通る。

(2)　放物線 $y=x^2$ を平行移動した曲線で，点 $(2,\ 3)$ を通り，頂点が直線 $y=x+1$ 上にある。

$y=2x^2-x+1$ を
平方完成している者がいる

解答　(1)　$y=2x^2-2x+2$

(2)　$y=(x-1)^2+2$，$y=(x-2)^2+3$　$(y=x^2-2x+3,\ \ y=x^2-4x+7)$

解説

(1)　求める2次関数は $y=2x^2+bx+c$ と表される。

このグラフが2点 $(1,\ 2)$，$(-1,\ 6)$ を通るから

$$2=2+b+c,\ \ 6=2-b+c$$

すなわち　$b+c=0$，$b-c=-4$

これを解くと　$b=-2$，$c=2$

よって，求める2次関数は　$y=2x^2-2x+2$

(2)　頂点が直線 $y=x+1$ 上にあるから，その座標は $(p,\ p+1)$ と表される。

また，放物線 $y=x^2$ を平行移動したものであるから，その方程式は

$$y=(x-p)^2+p+1 \quad \cdots\cdots ①$$

と表される。

このグラフが点 $(2,\ 3)$ を通るから　$(2-p)^2+p+1=3$

整理して　$p^2-3p+2=0$

よって　$(p-1)(p-2)=0$

ゆえに　$p=1,\ 2$

①に代入して

$y=(x-1)^2+2$，$y=(x-2)^2+3$　$(y=x^2-2x+3,\ \ y=x^2-4x+7)$

$\boxed{12}$ a は定数とする。関数 $y=-x^2+4ax-a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値が2であるとき，a の値を求めよ。

解答　$a=-2,\ \frac{1+\sqrt{33}}{8}$

解説

$y=-x^2+4ax-a$ を変形すると　$y=-(x-2a)^2+4a^2-a$

この関数のグラフの軸は　直線 $x=2a$

[1]　$2a<0$ すなわち $a<0$ のとき

関数のグラフは図[1]の実線部分である。

よって，y は $x=0$ で最大値 $-a$ をとる。

最大値が2であるから　$-a=2$　より　$a=-2$　（これは $a<0$ を満たす）

[2]　$0\leqq 2a\leqq 2$　すなわち　$0\leqq a\leqq 1$ のとき

関数のグラフは図[2]の実線部分である。

よって，y は $x=2a$ で最大値 $4a^2-a$ をとる。

最大値が2であるから $4a^2-a=2$　より　$4a^2-a-2=0$

解の公式より　$a=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 4\cdot(-2)}}{2\cdot 4}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$

$0\leqq a\leqq 1$ を満たすのは　$a=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$

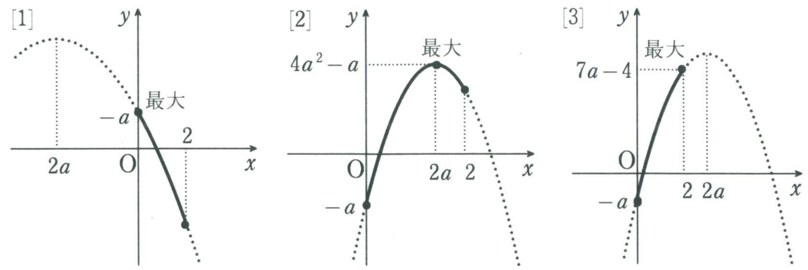
[3]　$2<2a$　すなわち　$1<a$ のとき

関数のグラフは図[3]の実線部分である。

よって，y は $x=2$ で最大値 $-2^2+4a\cdot 2-a=7a-4$ をとる。

最大値が2であるから　$7a-4=2$　より　$a=\frac{6}{7}$

しかしこれは $a>1$ を満たさない。



以上より　$a=-2,\ \frac{1+\sqrt{33}}{8}$

$\boxed{13}$ 関数 $y=3x^2-6ax+2$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値および最小値を，次の(1)～(5)の場合について求めよ。

(1)　$a<0$　　(2)　$0\leqq a<1$　　(3)　$a=1$　　(4)　$1<a\leqq 2$　　(5)　$a>2$

解答

(1)　$x=2$ で最大値 $14-12a$，$x=0$ で最小値2

(2)　$x=2$ で最大値 $14-12a$，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$

(3)　$x=0$，2で最大値2，$x=1$ で最小値 -1

(4)　$x=0$ で最大値2，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$

(5)　$x=0$ で最大値2，$x=2$ で最小値 $14-12a$

解説

$y=3x^2-6ax+2$ を変形すると　$y=3(x-a)^2-3a^2+2$

この関数のグラフの軸は　直線 $x=a$

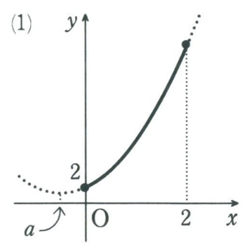
また，$x=0$ のとき　$y=2$

$x=2$ のとき　$y=14-12a$

$x=a$ のとき　$y=-3a^2+2$

(1)　$a<0$ のとき

$x=2$ で最大値 $14-12a$，$x=0$ で最小値2をとる。



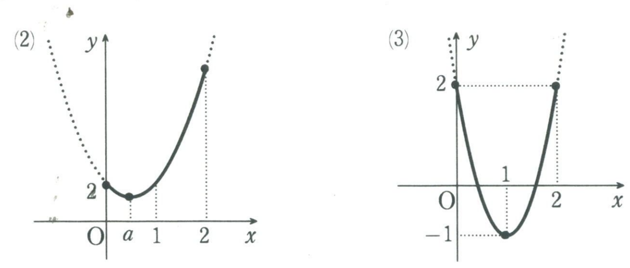
(2)　$0\leqq a<1$ のとき

$x=2$ で最大値 $14-12a$，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$ をとる。

(3)　$a=1$ のとき

$x=0$，2で最大値2，$x=1$ で最小値 -1 をとる。

← $a=1$ であるが
最大値最小値に a が残る者がいる。



(4)　$1<a\leqq 2$ のとき

$x=0$ で最大値2，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$ をとる。

(5)　$a>2$ のとき

$x=0$ で最大値2，$x=2$ で最小値 $14-12a$ をとる。