

1 次の集合を、要素を書き並べて表せ。

(1) 18の正の約数全体の集合 A

(2) $B = \{2n \mid 1 \leq n \leq 5, n \text{ は整数}\}$

2 次の集合の部分集合をすべてあげよ。

$\{1, 2, 3\}$

3 次の2つの集合 A, B について、 $A \cap B$ と $A \cup B$ を求めよ。

$A = \{x \mid 0 \leq x \leq 4, x \text{ は実数}\}, B = \{x \mid 2 < x < 5, x \text{ は実数}\}$

(1) $A \cap B$

(2) $A \cup B$

(3) $\overline{A}$

(4) $\overline{A \cap B}$

(5) $\overline{A \cup B}$

5 次の命題の真偽を調べて に記入せよ。また、偽の場合は、

反例を1つ示せ。ただし、 x, y は実数とする。

(1) $x^2 = y^2 \implies x = y$

命題は、

(2) $x < 2 \implies |x| < 2$

命題は、

6 a, b, c は実数、 m, n は自然数とする。次の に、下の

(ア)～(エ)のうち、適するものを入れよ。

(ア) 必要条件であるが十分条件でない

(イ) 十分条件であるが必要条件でない

(ウ) 必要十分条件である

(エ) 必要条件でも十分条件でもない

(1) $a = 3$ は、 $a^2 = 9$ であるための である。

(2) $a^2 + b^2 = 0$ は、 $a = b = 0$ であるための である。

(3) $ac = bc$ は、 $a = b$ であるための である。

(4) $m + n$ が偶数であることは、 m, n の少なくとも一方が偶数であるための である。

(5) $ab + 1 = a + b$ であることは、「 $a = 1$ または $b = 1$ 」であるための である。

7 a は実数、 m, n は整数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) $a \geq 1$

(2) m, n はともに奇数

8 x, y は実数とする。次の命題の逆、裏、対偶を述べよ。また、逆と対偶の真偽を調べて に記入し、偽のときは反例を1つ示せ。

(1) xy が有理数 $\implies$ 「 x は有理数 かつ y は有理数」

【逆】

逆の真偽：

【裏】

【対偶】

対偶の真偽：

(2) 「 $x \leq 1$ または $y \leq 1$ 」 $\implies xy \leq 1$

【逆】

逆の真偽：

【裏】

【対偶】

対偶の真偽：

- [9] 全体集合 $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 10, x \text{ は整数}\}$ の部分集合 A, B について、 $\overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 8, 10\}$, $A \cap \overline{B} = \{2, 6\}$, $A \cap B = \{1, 5, 9\}$ であるという。 A と B を求めよ。

- [10] 全体集合 $U = \{x \mid x \text{ は整数}\}$ とし、その部分集合 A, B について、 $A = \{3, a+2, 3-a\}$, $B = \{-4, a-1, 10-a\}$ であるという。 $A \cap B = \{3, b\}$ となるように、定数 a, b の値を求めよ。ただし、 $b \neq 3$ とする。

- [11] x は実数とする。 $|x-a| < 3$ が、 $2x+a > 0$ であるための十分条件であるが、必要条件ではないとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

- [12] n は整数とする。対偶を利用して、次の命題を証明せよ。
「 $n^2 + 1$ が奇数 $\implies n$ は偶数」

- [13] 命題「 $m^2 + 3n^2$ が4の倍数でない $\implies m, n$ のうち少なくとも一方は偶数」……① について、次の問いに答えよ。ただし、 m, n は整数とする。
(1) 命題①の対偶を述べよ。

(2) 対偶を利用して、命題①を証明せよ。

- [14] $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて、次の命題を証明せよ。
「 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ は無理数である。」

- [15] 次の問いに答えよ。
(1) a, b を有理数とする。 $\sqrt{5}$ が無理数であることを用いて、次の命題を証明せよ。
「 $a + b\sqrt{5} = 0 \implies b = 0$ 」

- (2) (1)の結果を用いて、次の方程式を満たす有理数 a, b を求めよ。
 $a(1+\sqrt{5}) + b(2\sqrt{5}-1) + 3 = 0$

1 次の集合を、要素を書き並べて表せ。

(1) 18 の正の約数全体の集合 A

各 3

$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

(2) $B = \{2n \mid 1 \leq n \leq 5, n \text{ は整数}\}$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

2 次の集合の部分集合をすべてあげよ。

$\{1, 2, 3\}$

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \phi$$

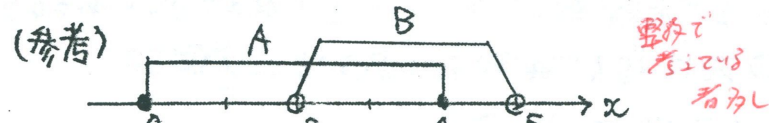
$$\{1, 2, 3\}, \phi$$

3 次の 2 つの集合 A, B について、 $A \cap B$ と $A \cup B$ を求めよ。

$$A = \{x \mid 0 \leq x \leq 4, x \text{ は実数}\}, B = \{x \mid 2 < x < 5, x \text{ は実数}\}$$

$$A \cap B = \{x \mid 2 < x \leq 4, x \text{ は実数}\}$$

$$A \cup B = \{x \mid 0 \leq x < 5, x \text{ は実数}\}$$



4 全体集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ の部分集合 A, B を $A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$ とする。次の集合を求めよ。

(1) $A \cap B$

$$= \{2, 6\}$$

(2) $A \cup B$

$$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

(3) $\bar{A}$

$$= \{4, 5, 7, 8, 9\}$$

(4) $\bar{A} \cap B$

$$= \{4, 8\}$$

$$(5) \overline{A \cup B} = \overline{A \cap B} = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

各 2

5 次の命題の真偽を調べて ☐ に記入せよ。また、偽の場合は、

反例を 1 つ示せ。ただし、 x, y は実数とする。

$$(1) x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$$

命題は、

偽

$$\text{反例 } x=1, y=-1$$

$$(2) x < 2 \Rightarrow |x| < 2$$

命題は、

偽

$$\text{反例 } x=-3$$

$$(\text{参考}) |x| < 2 \text{ の解は } -2 < x < 2$$

6 a, b, c は実数、 m, n は自然数とする。次の ☐ に、下の

(ア)～(エ)のうち、適するものを入れよ。

(ア) 必要条件であるが十分条件でない

(イ) 十分条件であるが必要条件でない

(ウ) 必要十分条件である

(エ) 必要条件でも十分条件でもない

$$(1) a=3 \text{ は、} a^2=9 \text{ であるための } \boxed{1} \text{ である。}$$

$$(2) a^2+b^2=0 \text{ は、} a=b=0 \text{ であるための } \boxed{1} \text{ である。}$$

$$(3) ac=bc \text{ は、} a=b \text{ であるための } \boxed{ア} \text{ である。}$$

$$(4) m+n \text{ が偶数であることは、} m, n \text{ の少なくとも一方が偶数であるための } \boxed{イ} \text{ である。}$$

$$(5) ab+1=a+b \text{ であることは、} \text{「} a=1 \text{ または } b=1 \text{」 であるための } \boxed{ウ} \text{ である。}$$

7 a は実数、 m, n は整数とする。次の条件の否定を述べよ。

$$(1) a \geq 1$$

$$a < 1$$

(2) m, n はともに奇数

m, n の少なくとも一方は偶数
(m は偶数 または n は偶数)

8 x, y は実数とする。次の命題の逆、裏、対偶を述べよ。また、逆と対偶の真偽を調べて ☐ に記入し、偽のときは反例を 1 つ示せ。

$$(1) xy \text{ が有理数} \Rightarrow \text{「} x \text{ は有理数 かつ } y \text{ は有理数」}$$

$$\text{【逆】「} x \text{ は有理数 かつ } y \text{ は有理数」} \Rightarrow xy \text{ が有理数}$$

逆の真偽：

真

【裏】

$$xy \text{ が無理数} \Rightarrow \text{「} x \text{ は無理数 または } y \text{ は無理数」}$$

【対偶】

$$\text{「} x \text{ は無理数 または } y \text{ は無理数」} \Rightarrow xy \text{ は無理数}$$

対偶の真偽：

偽

$$(2) \text{「} x \leq 1 \text{ または } y \leq 1 \text{」} \Rightarrow xy \leq 1$$

【逆】

$$xy \leq 1 \Rightarrow \text{「} x \leq 1 \text{ または } y \leq 1 \text{」}$$

逆の真偽：

真

【裏】

$$\text{「} x > 1 \text{ かつ } y > 1 \text{」} \Rightarrow xy > 1$$

【対偶】

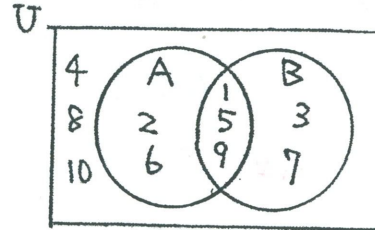
$$xy > 1 \Rightarrow \text{「} x > 1 \text{ かつ } y > 1 \text{」}$$

対偶の真偽：

偽

$$x=10, y=0.9$$

- [9] 全体集合 $U=\{x \mid 1 \leq x \leq 10, x \text{ は整数}\}$ の部分集合 A, B について、 $\overline{A \cap B} = \{4, 8, 10\}$, $A \cap \overline{B} = \{2, 6\}$, $A \cap B = \{1, 5, 9\}$ であるという。 A と B を求めよ。



④

$\overline{A \cap B} = \overline{A \cap B}$ に注意して

ベン図に書き込むと

右図になる。

よって $A = \{1, 2, 5, 6, 9\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$



- [10] 全体集合 $U=\{x \mid x \text{ は整数}\}$ とし、その部分集合 A, B について、 $A=\{3, a+2, 3-a\}$, $B=\{-4, a-1, 10-a\}$ であるという。 $A \cap B = \{3, b\}$ となるように、定数 a, b の値を求めよ。ただし、 $b \neq 3$ とする。

$A \cap B = \{3, b\}$ となるから $3 \in B$

よって $a-1=3$ または $10-a=3$

④

(i) $a-1=3$ すなわち $a=4$ のとき

$A=\{3, 6, -1\}$ $B=\{-4, 3, 6\}$

したがって $b=6$

(ii) $10-a=3$ すなわち $a=7$ のとき

$A=\{3, 9, -4\}$ $B=\{-4, 6, 3\}$ $\therefore b=-4$

(i)(ii) より $\begin{cases} a=4 \\ b=6 \end{cases}$ または $\begin{cases} a=7 \\ b=-4 \end{cases}$

- [11] x は実数とする。 $|x-a| < 3$ が、 $2x+a > 0$ であるための十分条件であるが、必要条件ではないとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

$|x-a| < 3$ を解くと $a-3 < x < a+3$

$2x+a > 0$ " $x > -\frac{a}{2}$

④

$P=\{x \mid a-3 < x < a+3, x \text{ は実数}\}$

$Q=\{x \mid x > -\frac{a}{2}, x \text{ は実数}\}$ とおくと

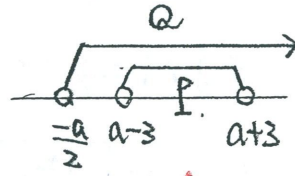
$P \subset Q$ となればよいので

$-\frac{a}{2} \leq a-3$

$-a \leq 2a-6$

$-3a \leq -6$

$\therefore a \geq 2$



- [12] n は整数とする。対偶を利用して、次の命題を証明せよ。
「 n^2+1 が奇数 $\Rightarrow n$ は偶数」

対偶 「 n が奇数 $\Rightarrow n^2+1$ は偶数」を証明する

n が奇数のとき、ある整数 k を用いて

$n=2k+1$ と表される。

このとき

$n^2+1=(2k+1)^2+1=4k^2+4k+2$

$=2(2k^2+2k+1)$

$2k^2+2k+1$ は整数であるから n^2+1 は偶数

よって対偶は真であり、もとの命題も真である。

④

- [13] 命題 「 m^2+3n^2 が4の倍数でない $\Rightarrow m, n$ のうち少なくとも一方は偶数」……① について、次の問いに答えよ。ただし、 m, n は整数とする。

(1) 命題①の対偶を述べよ。

「 m, n はともに奇数 $\Rightarrow m^2+3n^2$ は4の倍数」

③

(2) 対偶を利用して、命題①を証明せよ。

(i) の対偶を証明する。

m, n はともに奇数であるから

ある整数 k, l を用いて

$m=2k+1$ と表される

$n=2l+1$

このとき

$m^2+3n^2=(2k+1)^2+3(2l+1)^2$

$=4k^2+4k+1+3(4l^2+4l+1)$

$=4(k^2+k+3l^2+3l+1)$

k^2+k+3l^2+3l+1 は整数であるから

m^2+3n^2 は4の倍数

よって対偶は真であり、もとの命題も真である。

④

- [14] $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて、次の命題を証明せよ。

「 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ は無理数である。」

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ が無理数でない仮定すると

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ は有理数である。その有理数を r とすると

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=r$ より $\frac{\sqrt{6}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=r$

したがって $\frac{3+\sqrt{3}}{2}=r$ よって $\sqrt{3}=2r-3$

r が有理数ならば $2r-3$ も有理数であるからこの等式は $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。

ゆえに $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ は無理数である。

④

- [15] 次の問いに答えよ。

(1) a, b を有理数とする。 $\sqrt{5}$ が無理数であることを用いて、次の命題を証明せよ。

「 $a+b\sqrt{5}=0 \Rightarrow b=0$ 」

$b \neq 0$ と仮定する

$a+b\sqrt{5}=0$ を変形して $\sqrt{5}=-\frac{a}{b}$ ……①

a, b が有理数ならば $-\frac{a}{b}$ も有理数であるから

①式は $\sqrt{5}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって $b=0$

④

(2) (1)の結果を用いて、次の方程式を満たす有理数 a, b を求めよ。

$a(1+\sqrt{5})+b(2\sqrt{5}-1)+3=0$

$(a-b+3)+(a+2b)\sqrt{5}=0$

a, b が有理数であるから $a-b+3, a+2b$ も有理数である。

(1)の結果より $a+2b=0$ したがって $a-b+3=0$

$\begin{cases} a+2b=0 \dots \text{①} \\ a-b+3=0 \dots \text{②} \end{cases}$

①より $a=-2b$ ……③

③を②へ代入して

$-3b+3=0 \therefore b=1$

③より $a=-2$

Ans. $a=-2, b=1$

③