数学演習（２次関数のグラフ）Ｒ２．６．２６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の 2 次式を平方完成せよ。

(1) x^2-4x+7　(2) $-2x^2-4x-6$　(3) $2x^2-3x+1$

(4) $\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}$　(5) $(x+1)(x-3)$　(6) $(2x+1)(3-x)$

$\boxed{2}$ （重要）次の 2 次式を平方完成せよ。ただし a は定数とする。

(1) $x^2-2ax-a^2+2a$　(2) $-x^2+2ax-a^2+a+3$

(3) $x^2-2ax-2x-2a+6$　(4) $ax^2-3ax+2a+1$

(5) $ax^2-4a^2x+3a+1$　(6) $x^2-(a+1)x+a^2+a-1$

$\boxed{3}$ 次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=x^2-3$　(2) $y=-2x^2+1$

(3) $y=2(x-1)^2$　(4) $y=-3(x+2)^2$

(5) $y=2(x-2)^2-1$　(6) $y=-(x+1)^2-2$

$\boxed{4}$ 次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=x^2-6x$　(2) $y=3x^2-6x+2$

(3) $y=-x^2-4x+1$　(4) $y=-2x^2-8x-5$

(5) $y=-x^2+5x-5$　(6) $y=2x^2-6x+3$

$\boxed{5}$ 次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=-3x^2+5$　(2) $y=x^2+6x+9$

(3) $y=x^2+x-1$　(4) $y=-2x^2-6x-5$

$\boxed{6}$ 次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1) $y=2x^2+5x+2$　(2) $y=\frac{1}{2}x^2+2x$　(3) $y=-\frac{2}{3}x^2-4x$

(4) $y=(x+2)(x-1)$　(5) $y=(2x+1)(x-2)$

$\boxed{1}$ 次の２次式を平方完成せよ。

(1) x^2-4x+7　　(2) $-2x^2-4x-6$　　(3) $2x^2-3x+1$

(4) $\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{7}{3}$　　(5) $(x+1)(x-3)$　　(6) $(2x+1)(3-x)$

解答 (1) $(x-2)^2+3$　(2) $-2(x+1)^2-4$　(3) $2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$

(4) $\dfrac{1}{3}(x-2)^2+1$　(5) $(x-1)^2-4$　(6) $-2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{49}{8}$

解説

(1) $x^2-4x+7=(x^2-4x+2^2-2^2)+7=\{(x-2)^2-2^2\}+7=(x-2)^2+3$

(2) $-2x^2-4x-6=-2(x^2+2x)-6=-2(x^2+2x+1^2-1^2)-6=-2\{(x+1)^2-1^2\}-6$
$=-2(x+1)^2-4$

(3) $2x^2-3x+1=2\left(x^2-\dfrac{3}{2}x\right)+1=2\left\{x^2-\dfrac{3}{2}x+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}+1$
$=2\left\{\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}+1=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$

(4) $\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{7}{3}=\dfrac{1}{3}(x^2-4x)+\dfrac{7}{3}=\dfrac{1}{3}(x^2-4x+2^2-2^2)+\dfrac{7}{3}=\dfrac{1}{3}\{(x-2)^2-2^2\}+\dfrac{7}{3}$
$=\dfrac{1}{3}(x-2)^2+1$

(5) $(x+1)(x-3)=x^2-2x-3=(x^2-2x+1^2-1^2)-3=\{(x-1)^2-1^2\}-3=(x-1)^2-4$

(6) $(2x+1)(3-x)=-2x^2+5x+3=-2\left(x^2-\dfrac{5}{2}x\right)+3$
$=-2\left\{x^2-\dfrac{5}{2}x+\left(\dfrac{5}{4}\right)^2-\left(\dfrac{5}{4}\right)^2\right\}+3=-2\left\{\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2-\left(\dfrac{5}{4}\right)^2\right\}+3$
$=-2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{49}{8}$

$\boxed{2}$ （重要）次の２次式を平方完成せよ。ただし a は定数とする。

(1) $x^2-2ax-a^2+2a$　　(2) $-x^2+2ax-a^2+a+3$

(3) $x^2-2ax-2x-2a+6$　　(4) $ax^2-3ax+2a+1$

(5) $ax^2-4a^2x+3a+1$　　(6) $x^2-(a+1)x+a^2+a-1$

解答 (1) $(x-a)^2-2a^2+2a$　(2) $-(x-a)^2+a+3$

(3) $(x-a-1)^2-a^2-4a+5$　(4) $a\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}a+1$

(5) $a(x-2a)^2-4a^3+3a+1$　(6) $\left(x-\dfrac{a+1}{2}\right)^2+\dfrac{3a^2+2a-5}{4}$

解説

(1) $x^2-2ax-a^2+2a=(x-a)^2-a^2-a^2+2a=(x-a)^2-2a^2+2a$

(2) $-x^2+2ax-a^2+a+3=-(x^2-2ax)-a^2+a+3=-\{(x-a)^2-a^2\}-a^2+a+3$
$=-(x-a)^2+a^2-a^2+a+3=-(x-a)^2+a+3$

(3) $x^2-2ax-2x-2a+6=x^2+(-2a-2)x-2a+6=x^2-2(a+1)x-2a+6$
$=\{x-(a+1)\}^2-(a+1)^2-2a+6$
$=\{x-(a+1)\}^2-(a^2+2a+1)-2a+6$
$=\{x-(a+1)\}^2-a^2-2a-1-2a+6$
$=(x-a-1)^2-a^2-4a+5$

注意　$x^2-2ax-2x-2a+6=(x-a)^2-2a^2-2x-2a+6$ は平方完成ではない
括弧の外に x が残ってはいけません。

(4) $ax^2-3ax+2a+1=a(x^2-3x)+2a+1=a\left\{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}+2a+1$
$=a\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}a+2a+1=a\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}a+1$

(5) $ax^2-4a^2x+3a+1=a(x^2-4ax)+3a+1=a\{(x-2a)^2-(2a)^2\}+3a+1$
$=a\{(x-2a)^2-4a^2\}+3a+1$
$=a(x-2a)^2-4a^3+3a+1$

(6) $x^2-(a+1)x+a^2+a-1=\left(x-\dfrac{a+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a+1}{2}\right)^2+a^2+a-1$　（通分する）
$=\left(x-\dfrac{a+1}{2}\right)^2-\dfrac{(a+1)^2}{4}+\dfrac{4a^2+4a-4}{4}$
$=\left(x-\dfrac{a+1}{2}\right)^2-\dfrac{a^2+2a+1}{4}+\dfrac{4a^2+4a-4}{4}$
a^2+2a+1 全体にマイナスがかかることに注意→ $=\left(x-\dfrac{a+1}{2}\right)^2+\dfrac{-a^2-2a-1+4a^2+4a-4}{4}$
$=\left(x-\dfrac{a+1}{2}\right)^2+\dfrac{3a^2+2a-5}{4}$

参考　答えは $\left(x-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}a^2+\dfrac{1}{2}a-\dfrac{5}{4}$ となっていてもよい

$\boxed{3}$ 次の２次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=x^2-3$　　(2) $y=-2x^2+1$

(3) $y=2(x-1)^2$　　(4) $y=-3(x+2)^2$

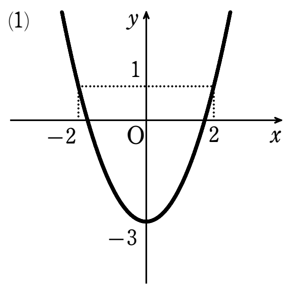
(5) $y=2(x-2)^2-1$　　(6) $y=-(x+1)^2-2$

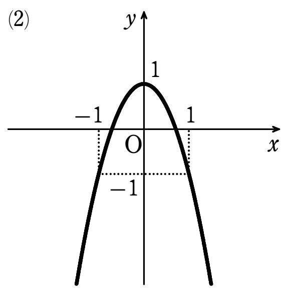
解答　グラフ，軸，頂点の順に

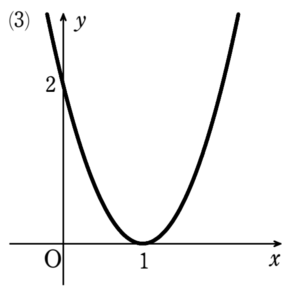
(1) ［図］，y 軸，点 $(0,\ -3)$　(2) ［図］，y 軸，点 $(0,\ 1)$

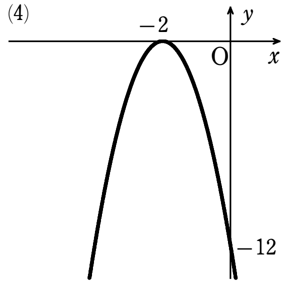
(3) ［図］，直線 $x=1$，点 $(1,\ 0)$　(4) ［図］，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ 0)$

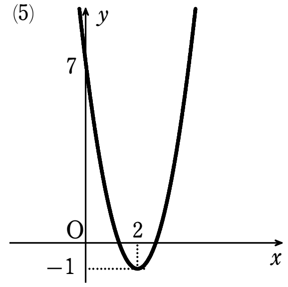
(5) ［図］，直線 $x=2$，点 $(2,\ -1)$　(6) ［図］，直線 $x=-1$，点 $(-1,\ -2)$

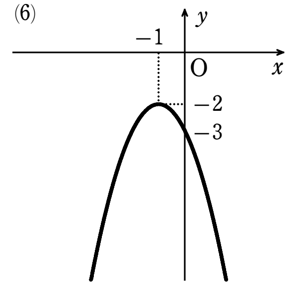
(1)


(2)


(3)


(4)


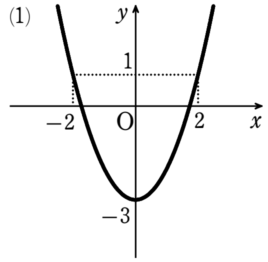
(5)


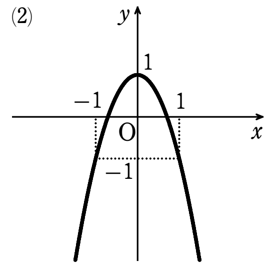
(6)


解説

(1)　グラフは図。
軸は　y 軸（直線 $x=0$ でもよい），頂点は $y=(x-0)^2-3$ と考えて　点 $(0,\ -3)$

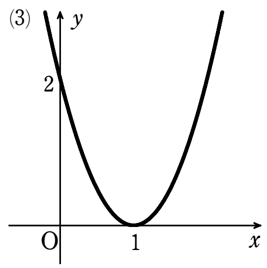
(2)　グラフは図。
軸は　y 軸（直線 $x=0$ でもよい），頂点は $y=-2(x-0)^2+1$ と考えて　点 $(0,\ 1)$

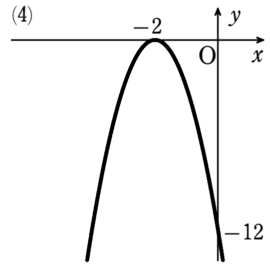
(1)


(2)


(3)　グラフは図。
軸は　直線 $x=1$，頂点は　$y=2(x-1)^2+0$ と考えて点 $(1,\ 0)$

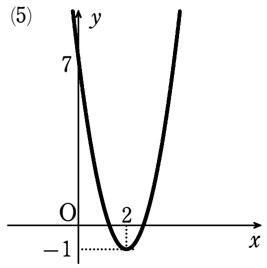
(4)　グラフは図。
軸は　直線 $x=-2$，頂点は　$y=-3(x+2)^2+0$ と考えて点 $(-2,\ 0)$

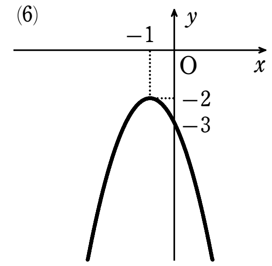
(3)


(4)


(5)　グラフは図。
軸は　直線 $x=2$，頂点は　点 $(2,\ -1)$

(6)　グラフは図。
軸は　直線 $x=-1$，頂点は　点 $(-1,\ -2)$

(5)


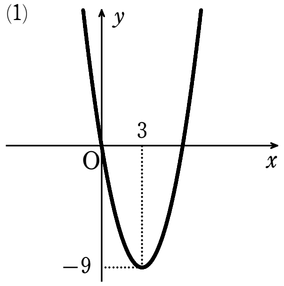
(6)


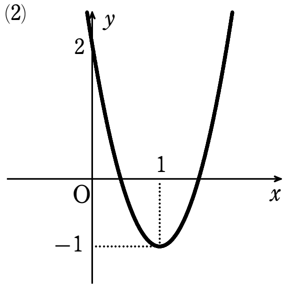
$\boxed{4}$ 次の２次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

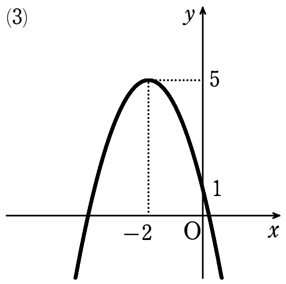
(1) $y=x^2-6x$　(2) $y=3x^2-6x+2$
(3) $y=-x^2-4x+1$　(4) $y=-2x^2-8x-5$
(5) $y=-x^2+5x-5$　(6) $y=2x^2-6x+3$

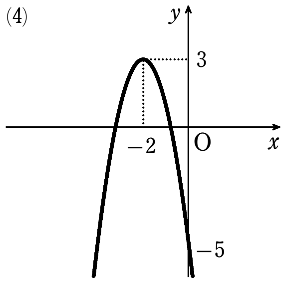
解答　グラフ，軸，頂点の順に

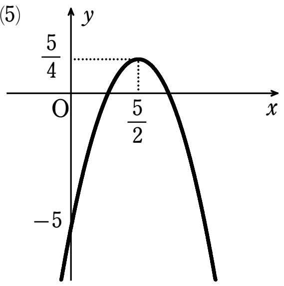
(1)［図］，直線 $x=3$，点 $(3,\ -9)$　(2)［図］，直線 $x=1$，点 $(1,\ -1)$
(3)［図］，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ 5)$　(4)［図］，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ 3)$
(5)［図］，直線 $x=\frac{5}{2}$，点 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{4}\right)$　(6)［図］，直線 $x=\frac{3}{2}$，点 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$

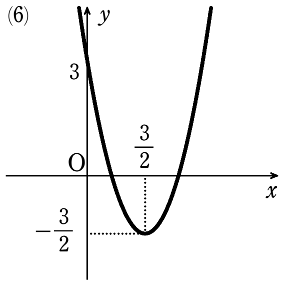
(1)


(2)


(3)


(4)


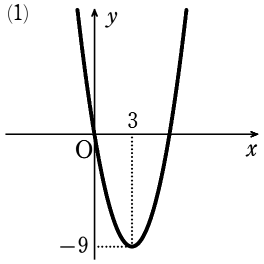
(5)


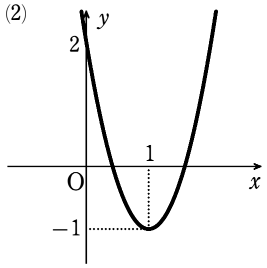
(6)


解説

(1) $x^2-6x=(x-3)^2-3^2=(x-3)^2-9$
よって　$y=(x-3)^2-9$
したがって，グラフは図。
軸は　直線 $x=3$，頂点は　点 $(3,\ -9)$

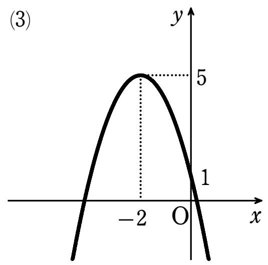
(2) $3x^2-6x+2=3(x^2-2x)+2=3\{(x-1)^2-1^2\}+2$
$=3(x-1)^2-1$
よって　$y=3(x-1)^2-1$
したがって，グラフは図。
軸は　直線 $x=1$，頂点は　点 $(1,\ -1)$

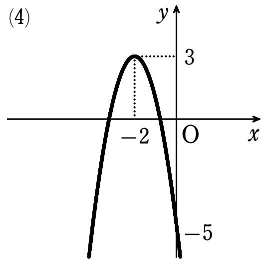
(1)


(2)


(3) $-x^2-4x+1=-(x^2+4x)+1=-\{(x+2)^2-2^2\}+1$
$=-(x+2)^2+5$
よって　$y=-(x+2)^2+5$
したがって，グラフは図。
軸は　直線 $x=-2$，頂点は　点 $(-2,\ 5)$

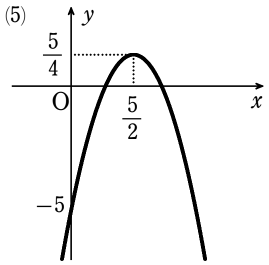
(4) $-2x^2-8x-5=-2(x^2+4x)-5=-2\{(x+2)^2-2^2\}-5$
$=-2(x+2)^2+3$
よって　$y=-2(x+2)^2+3$
したがって，グラフは図。
軸は　直線 $x=-2$，頂点は　点 $(-2,\ 3)$

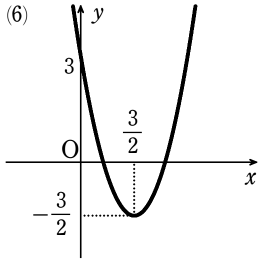
(3)


(4)


(5) $-x^2+5x-5=-(x^2-5x)-5=-\left\{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}-5$
$=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$
よって　$y=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$
したがって，グラフは図。
軸は　直線 $x=\frac{5}{2}$，頂点は　点 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{4}\right)$

(6) $2x^2-6x+3=2(x^2-3x)+3=2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+3$
$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$
よって　$y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$
したがって，グラフは図。
軸は　直線 $x=\frac{3}{2}$，頂点は　点 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$

(5)


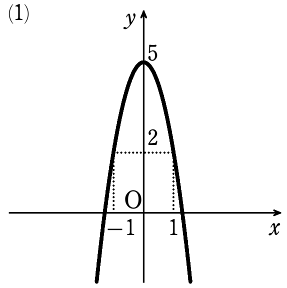
(6)


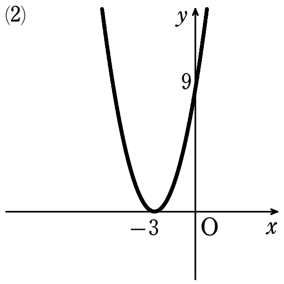
$\boxed{5}$ 次の２次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

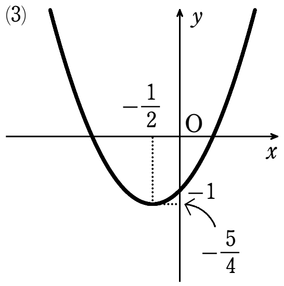
(1) $y=-3x^2+5$　(2) $y=x^2+6x+9$
(3) $y=x^2+x-1$　(4) $y=-2x^2-6x-5$

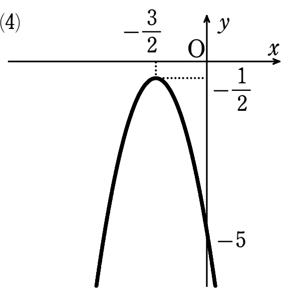
解答　グラフ，軸，頂点の順に

(1)［図］，y 軸，点 $(0,\ 5)$　(2)［図］，直線 $x=-3$，点 $(-3,\ 0)$
(3)［図］，直線 $x=-\frac{1}{2}$，点 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{5}{4}\right)$
(4)［図］，直線 $x=-\frac{3}{2}$，点 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

(1)


(2)


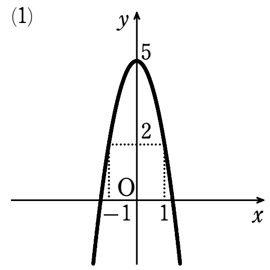
(3)


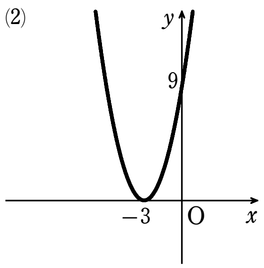
(4)


解説

(1) グラフは図。
軸は　y 軸（直線$x=0$ でもよい），頂点は $y=-3(x-0)^2+5$と考えて，　点 $(0,\ 5)$

(2) $y=(x+3)^2$
したがって，グラフは図。
軸は　直線 $x=-3$，頂点は $y=(x+3)^2+0$ と考えて　点 $(-3,\ 0)$

(1)


(2)


(3) $x^2+x-1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

よって　$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

したがって，グラフは図。

軸は　直線 $x=-\frac{1}{2}$，頂点は　点 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{5}{4}\right)$

(4) $-2x^2-6x-5=-2(x^2+3x)-5=-2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}-5$

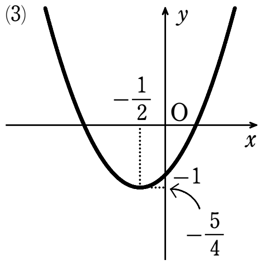
$=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

よって　$y=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

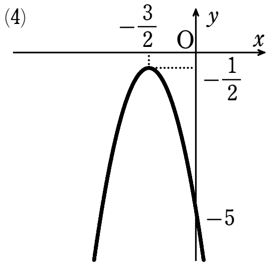
したがって，グラフは図。

軸は　直線 $x=-\frac{3}{2}$，頂点は　点 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

(3)



(4)



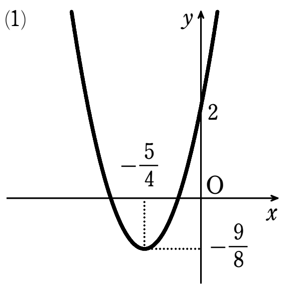
$\boxed{6}$ 次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1) $y=2x^2+5x+2$　(2) $y=\frac{1}{2}x^2+2x$　(3) $y=-\frac{2}{3}x^2-4x$

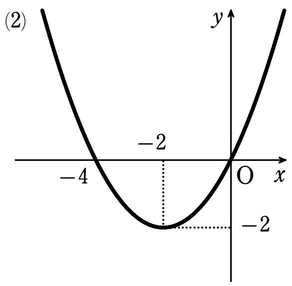
(4) $y=(x+2)(x-1)$　(5) $y=(2x+1)(x-2)$

解答　(1)〜(5)［図］

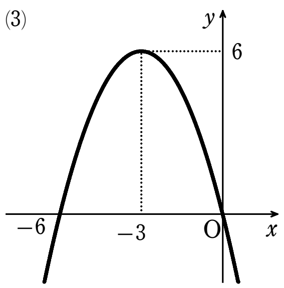
(1)



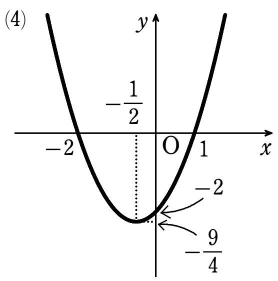
(2)



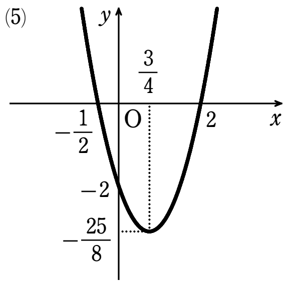
(3)



(4)



(5)



解説

(1) $2x^2+5x+2=2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)+2=2\left\{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right\}+2$

$=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$

よって　$y=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$

グラフは図。

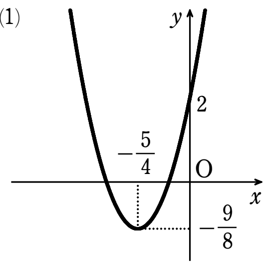
(2) $\frac{1}{2}x^2+2x=\frac{1}{2}(x^2+4x)=\frac{1}{2}\{(x+2)^2-2^2\}$

$=\frac{1}{2}(x+2)^2-2$

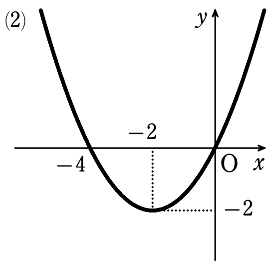
よって　$y=\frac{1}{2}(x+2)^2-2$

グラフは図。

(1)



(2)



(3) $-\frac{2}{3}x^2-4x=-\frac{2}{3}(x^2+6x)=-\frac{2}{3}\{(x+3)^2-3^2\}$

$=-\frac{2}{3}(x+3)^2+6$

よって　$y=-\frac{2}{3}(x+3)^2+6$

グラフは図。

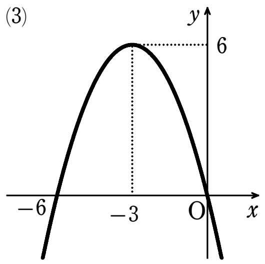
(4) $(x+2)(x-1)=x^2+x-2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

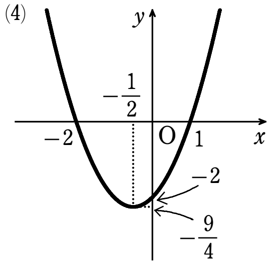
よって　$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

グラフは図。

(3)



(4)



(5) $(2x+1)(x-2)=2x^2-3x-2=2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)-2$

$=2\left\{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}-2$

$=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$

よって　$y=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$

グラフは図。