数学演習（展開･因数分解）Ｒ２．５．２５　　（　　）組（　　）番　名前（　　）

1 (1)～(3)の計算をせよ。また，(4)は展開せよ。

(1) $(-ab)^2(-2a^3b)$　　(2) $(-2x^4y^2z^3)(-3x^2y^2z^4)$

(3) $(-2x)^3(3x^2-2x+4)$　　(4) $(a+3b-c)^2$

2 (1)，(2)の式を**公式を用いて**展開せよ。また，(3)，(4)の式を因数分解せよ。

(1) $(5x-4y)^3$　　(2) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2$

(3) x^4-8xy^3　　(4) x^6+1

3 次の式を**工夫して**展開せよ。　$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

4 次の式を因数分解せよ。

(1) $12x^2+x-6$　　(2) $6x^2-13xy-5y^2$

(3) $4(x+y)^2-5(x+y)-6$

5 次の式を因数分解せよ。

(1) $3a^2b^3c-6ab^2c^3-2a^3bc^2$

(2) $(a-3b)x^2-(3b-a)y^2$　　(3) $ax-ay-az-y+x-z$

6 次の式を因数分解せよ。

(1) $\frac{1}{4}x^2+x+1$　　(2) $(3x-2)^2-2(3x+2)$

(3) $3a^4b-4a^2b^3-a^3b^2$　　(4) $a^2(a-b)+9b^2(b-a)$

7 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2y+x-y-1$　　(2) $ab^2-b^2c-c^2a+bc^2$

8 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2-(3y+4)x+(y+5)(2y-1)$　　(2) $6x^2-7xy+2y^2-6x+5y-12$

9 $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ を因数分解せよ。

10 次の式を因数分解せよ。

(1) x^4+4x^2+16

(2) $x^4-7x^2y^2+y^4$

11 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2-(a+b)x-2(a+b)^2$

(2) $(x-y)^2-4(x-y)z+4z^2$

(3) $abx^2+(a^2-b^2)x-ab$

12 次の式を因数分解せよ。

(1) $2(x-1)^2-11(x-1)+15$

(2) x^2-y^2+4y-4

(3) x^4-8x^2+16

(4) $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8$

13 次の式を因数分解せよ。

(1) $8a^3+27b^3$

(2) $64x^3-1$

(3) $8x^3-36x^2+54x-27$

(4) $4x^3-8x^2-9x+18$

14 (発展) 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x+3y-1)(x+3y+3)(x+3y+4)+12$

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

(3) $(a^2-1)(b^2-1)-4ab$

数学演習（展開･因数分解）Ｒ２．５．２５　　（　　）組（　　）番　名前（　　）

1 (1)～(3)の計算をせよ。また，(4)は展開せよ。

(1) $(-ab)^2(-2a^3b)$　(2) $(-2x^4y^2z^3)(-3x^2y^2z^4)$

(3) $(-2x)^3(3x^2-2x+4)$　(4) $(a+3b-c)^2$

解答 (1) $-2a^5b^3$　(2) $6x^6y^4z^7$　(3) $-24x^5+16x^4-32x^3$

(4) $a^2+9b^2+c^2+6ab-6bc-2ca$

解説

(1) $(-ab)^2(-2a^3b)=(-1)^2a^2b^2\times(-2a^3b)=1\cdot(-2)a^{2+3}b^{2+1}=-2a^5b^3$

(2) $(-2x^4y^2z^3)(-3x^2y^2z^4)=(-2)\cdot(-3)x^{4+2}y^{2+2}z^{3+4}=6x^6y^4z^7$

(3) $(-2x)^3(3x^2-2x+4)=-8x^3(3x^2-2x+4)$

$=-8x^3\cdot3x^2-8x^3\cdot(-2x)-8x^3\cdot4$

$=-24x^5+16x^4-32x^3$

(4) $(a+3b-c)^2=\{a+(3b-c)\}^2=(a+A)^2=a^2+2aA+A^2$

$=a^2+2a(3b-c)+(3b-c)^2$

$=a^2+6ab-2ac+9b^2-6bc+c^2$

$=a^2+9b^2+c^2+6ab-6bc-2ca$

別解 $(a+3b-c)^2=\{a+3b+(-c)\}^2$

$=a^2+(3b)^2+(-c)^2+2\cdot a\cdot3b+2\cdot3b(-c)+2(-c)a$

$=a^2+9b^2+c^2+6ab-6bc-2ca$

2 (1)，(2)の式を**公式を用いて**展開せよ。また，(3)，(4)の式を因数分解せよ。

(1) $(5x-4y)^3$　(2) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2$

(3) x^4-8xy^3　(4) x^6+1

解答 (1) $125x^3-300x^2y+240xy^2-64y^3$　(2) $a^6+2a^3b^3+b^6$

(3) $x(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$　(4) $(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

解説

(1) $(5x-4y)^3=(5x)^3-3\cdot(5x)^2\cdot4y+3\cdot5x\cdot(4y)^2-(4y)^3$

$=125x^3-300x^2y+240xy^2-64y^3$

(2) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2=\{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}^2$

$=(a^3+b^3)^2=(a^3)^2+2a^3b^3+(b^3)^2$

$=a^6+2a^3b^3+b^6$

(3) $x^4-8xy^3=x(x^3-8y^3)=x\{x^3-(2y)^3\}$

$=x(x-2y)\{x^2+x\cdot2y+(2y)^2\}$

$=x(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

(4) $x^6+1=(x^2)^3+1^3=A^3+1^3=(A+1)(A^2-A\cdot1+1^2)=(x^2+1)\{(x^2)^2-x^2\cdot1+1^2\}$

$=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

3 次の式を**工夫して**展開せよ。　$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

解答 $x^8+x^4y^4+y^8$

解説

与式$=\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}(x^4-x^2y^2+y^4)$

$=(A+xy)(A-xy)(x^4-x^2y^2+y^4)=\{A^2-(xy)^2\}(x^4-x^2y^2+y^4)$

$=\{(x^2+y^2)^2-x^2y^2\}(x^4-x^2y^2+y^4)=\{(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2\}(x^4-x^2y^2+y^4)$

$=(x^4+x^2y^2+y^4)(x^4-x^2y^2+y^4)$

$=\{(x^4+y^4)+x^2y^2\}\{(x^4+y^4)-x^2y^2\}=(B+x^2y^2)(B-x^2y^2)=B^2-(x^2y^2)^2$

$=(x^4+y^4)^2-(x^2y^2)^2$

$=(x^8+2x^4y^4+y^8)-x^4y^4=x^8+x^4y^4+y^8$

4 次の式を因数分解せよ。

(1) $12x^2+x-6$　(2) $6x^2-13xy-5y^2$

(3) $4(x+y)^2-5(x+y)-6$

解答 (1) $(3x-2)(4x+3)$　(2) $(2x-5y)(3x+y)$　(3) $(x+y-2)(4x+4y+3)$

解説

(1) $12x^2+x-6=(3x-2)(4x+3)$

(2) $6x^2-13xy-5y^2=(2x-5y)(3x+y)$

(1) $3\times-2\to-8$，$4\times3\to9$；$12\quad-6\quad1$

(2) $2\times-5y\to-15y$，$3\times y\to2y$；$6\quad-5y^2\quad-13y$

(3) $4(x+y)^2-5(x+y)-6=4A^2-5A-6$

$=(1\cdot A-2)(4\cdot A-3)=\{(x+y)-2\}\{4(x+y)+3\}$

$=(x+y-2)(4x+4y+3)$

$1\times-2\to-8$，$4\times3\to3$；$4\quad-6\quad-5$

5 次の式を因数分解せよ。

(1) $3a^2b^3c-6ab^2c^3-2a^3bc^2$

(2) $(a-3b)x^2-(3b-a)y^2$　(3) $ax-ay-az-y+x-z$

解答 (1) $abc(3ab^2-6bc^2-2a^2c)$　(2) $(a-3b)(x^2+y^2)$　(3) $(a+1)(x-y-z)$

解説

(1) $3a^2b^3c-6ab^2c^3-2a^3bc^2=abc\cdot3ab^2-abc\cdot6bc^2-abc\cdot2a^2c$

$=A\cdot3ab^2-A\cdot6bc^2-A\cdot2a^2c$

$=A(3ab^2-6bc^2-2a^2c)=abc(3ab^2-6bc^2-2a^2c)$

(2) $(a-3b)x^2-(3b-a)y^2=(a-3b)x^2+(a-3b)y^2=Ax^2+Ay^2=A(x^2+y^2)$

$=(a-3b)(x^2+y^2)$

(3) $ax-ay-az-y+x-z$　$a(x-y-z)-y+x-z$

$=a(x-y-z)+(x-y-z)=aA+A=a\cdot A+1\cdot A=(a+1)A=(a+1)(x-y-z)$

6 次の式を因数分解せよ。

(1) $\frac{1}{4}x^2+x+1$　(2) $(3x-2)^2-2(3x+2)$

(3) $3a^4b-4a^2b^3-a^3b^2$　(4) $a^2(a-b)+9b^2(b-a)$

解答 (1) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$　(2) $9x(x-2)$　(3) $a^2b(a+b)(3a-4b)$

(4) $(a-b)(a+3b)(a-3b)$

解説

(1) $\frac{1}{4}x^2+x+1=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}x\cdot1+1^2=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$

参考 $\frac{1}{4}x^2+x+1=\frac{1}{4}(x^2+4x+4)=\frac{1}{4}(x+2)^2$　でもよい。

(2) $(3x-2)^2-2(3x+2)=9x^2-12x+4-6x-4$

$=9x^2-18x=9x(x-2)$

(3) $3a^4b-4a^2b^3-a^3b^2=a^2b(3a^2-4b^2-ab)$　←たすき掛け

$=a^2b(3a^2-ab-4b^2)$

$=a^2b(a+b)(3a-4b)$

$1\times b\to3b$，$3\times-4b\to-4b$；$3\quad-4b^2\quad-b$

(4) $a^2(a-b)+9b^2(b-a)=a^2(a-b)-9b^2(a-b)$

$=a^2A-9b^2A=A(a^2-9b^2)=(a-b)(a^2-9b^2)$

$=(a-b)(a+3b)(a-3b)$

7 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2y+x-y-1$　(2) $ab^2-b^2c-c^2a+bc^2$

解答 (1) $(x-1)(xy+y+1)$　(2) $(b-c)(ab-bc+ca)$

解説

(1) $x^2y+x-y-1=(x^2-1)y+(x-1)$　←[x]2，[y]1　より y で降べきの順

$=(x+1)(x-1)y+(x-1)$

$=(x-1)Ay+A=A(x-1)y+A\cdot1=A\{(x-1)y+1\}$

$=(x-1)\{(x+1)y+1\}$　←かっこの中は展開しておく

$=(x-1)(xy+y+1)$

(2) $ab^2-b^2c-c^2a+bc^2=(b^2-c^2)a+(-b^2c+bc^2)$　←[a]1[b]2[c]2より

$=(b^2-c^2)a-bc(b-c)$　a で降べきの順

$=(b+c)(b-c)a-bc(b-c)$

$=(b+c)Aa-bcA=A\{(b+c)a-bc\}$

$=(b-c)\{(b+c)a-bc\}$　←かっこの中は展開しておく

$=(b-c)(ab-bc+ca)$

8 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2-(3y+4)x+(y+5)(2y-1)$　(2) $6x^2-7xy+2y^2-6x+5y-12$

解答 (1) $(x-y-5)(x-2y+1)$　(2) $(2x-y-4)(3x-2y+3)$

解説

(1) $x^2-(3y+4)x+(y+5)(2y-1)$　←[x]2[y]2

$=x^2+\underbrace{(-3y-4)}_{\text{和}}x+\underbrace{(y+5)(2y-1)}_{\text{積}}$

$1\times-(y+5)\to-y-5$，$1\times-(2y-1)\to-2y+1$；$1\quad(y+5)(2y-1)\quad-3y-4$

$=\{x-(y+5)\}\{x-(2y-1)\}$

$=(x-y-5)(x-2y+1)$

(2) $6x^2-7xy+2y^2-6x+5y-12$　←[x]2[y]2

$=6x^2+(-7y-6)x+(2y^2+5y-12)$

$=6x^2+\underbrace{(-7y-6)}_{\text{和}}x+\underbrace{(y+4)(2y-3)}_{\text{積}}$

$2\times-(y+4)\to-3y-12$，$3\times-(2y-3)\to-4y+6$；$6\quad(y+4)(2y-3)\quad-7y-6$

$=\{2x-(y+4)\}\{3x-(2y-3)\}$

$=(2x-y-4)(3x-2y+3)$

9 $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ を因数分解せよ。

解答 $(a-b)(b-c)(c-a)$

解説

[a]2[b]2[c]2より，展開してからaについて整理すると

$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+(bc^2-b^2c)$

$=(c-b)a^2-(c+b)(c-b)a+bc(c-b)$

$=Aa^2-(c+b)Aa+bcA$

$=A\{a^2-(c+b)a+bc\}$

$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)$

$=-(b-c)\times(a-b)\times\{-(c-a)\}$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

$X^2-(c+b)X+bc$
和　積 →
$=(X-b)(X-c)$

10 次の式を因数分解せよ。

(1) x^4+4x^2+16　　(2) $x^4-7x^2y^2+y^4$

解答 (1) $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$　　(2) $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$

解説

(1) $x^4+4x^2+16=(x^4+8x^2+16)-4x^2$

$=(x^2+4)^2-(2x)^2$

$=A^2-(2x)^2=(A+2x)(A-2x)$

$=\{(x^2+4)+2x\}\{(x^2+4)-2x\}=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

(2) $x^4-7x^2y^2+y^4=(x^4+2x^2y^2+y^4)-9x^2y^2$

$=(x^2+y^2)^2-(3xy)^2$

$=A^2-(3xy)^2=(A+3xy)(A-3xy)$

$=\{(x^2+y^2)+3xy\}\{(x^2+y^2)-3xy\}=(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$

11 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2-(a+b)x-2(a+b)^2$　　(2) $(x-y)^2-4(x-y)z+4z^2$

(3) $abx^2+(a^2-b^2)x-ab$

解答 (1) $(x+a+b)(x-2a-2b)$　　(2) $(x-y-2z)^2$　　(3) $(ax-b)(bx+a)$

解説

(1) $x^2-(a+b)x-2(a+b)^2=x^2-Ax-2A^2=(x+A)(x-2A)$

$=\{x+(a+b)\}\{x-2(a+b)\}=(x+a+b)(x-2a-2b)$

(2) $(x-y)^2-4(x-y)z+4z^2=A^2-4Az+4z^2=(A-2z)^2$

$=\{(x-y)-2z\}^2=(x-y-2z)^2$

(3) $abx^2+(a^2-b^2)x-ab=(ax-b)(bx+a)$

↑ x の２次式と思ってたすき掛け

a	$-b$ →	$-b^2$
b	a →	a^2
ab	$-ab$	a^2-b^2

12 次の式を因数分解せよ。

(1) $2(x-1)^2-11(x-1)+15$　　(2) x^2-y^2+4y-4

(3) x^4-8x^2+16　　(4) $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8$

解答 (1) $(x-4)(2x-7)$　　(2) $(x+y-2)(x-y+2)$

(3) $(x+2)^2(x-2)^2$　　(4) $(x+1)(x+2)(x-1)(x+4)$

解説

(1) $2(x-1)^2-11(x-1)+15=2A^2-11A+15$

$=(A-3)(2A-5)$

この段階で終わらない→ $=\{(x-1)-3\}\{2(x-1)-5\}$

$=(x-4)(2x-7)$

1	-3 →	-6
2	-5 →	-5
2	15	-11

(2) $x^2-y^2+4y-4=x^2-(y^2-4y+4)=x^2-(y-2)^2$　← ２乗－２乗を目指す

$=x^2-A^2=(x+A)(x-A)=\{x+(y-2)\}\{x-(y-2)\}$

$=(x+y-2)(x-y+2)$

(3) 与式$=(x^2)^2-8x^2+16=A^2-8A+16=(A-4)^2=(x^2-2^2)^2$

$=\{(x+2)(x-2)\}^2=(x+2)^2(x-2)^2$　←ここまで計算する

(4) $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8=A^2-2A-8=(A+2)(A-4)$

$=\{(x^2+3x)+2\}\{(x^2+3x)-4\}$

$=(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)$

$=(x+1)(x+2)(x-1)(x+4)$

13 次の式を因数分解せよ。

(1) $8a^3+27b^3$　　(2) $64x^3-1$

(3) $8x^3-36x^2+54x-27$　　(4) $4x^3-8x^2-9x+18$

解答 (1) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$　　(2) $(4x-1)(16x^2+4x+1)$

(3) $(2x-3)^3$　　(4) $(x-2)(2x+3)(2x-3)$

解説

(1) $8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3$

$=(2a+3b)\{(2a)^2-2a\cdot3b+(3b)^2\}$

$=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$

(2) $64x^3-1=(4x)^3-1^3=(4x-1)\{(4x)^2+4x\cdot1+1^2\}$

$=(4x-1)(16x^2+4x+1)$

(3) $8x^3-36x^2+54x-27=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot3+3\cdot2x\cdot3^2-3^3$　←　３乗の公式

$=(2x-3)^3$　　$A^3-3A^2B+3AB^2-B^3=(A-B)^3$

別解 $8x^3-36x^2+54x-27=8x^3-27-(36x^2-54x)$

$=(2x)^3-3^3-18x(2x-3)$

$=(2x-3)\{(2x)^2+2x\cdot3+3^2\}-18x(2x-3)$

$=A(4x^2+6x+9)-18xA$

$=A\{(4x^2+6x+9)-18x\}$

$=(2x-3)(4x^2+6x+9-18x)$

$=(2x-3)(4x^2-12x+9)$

$=(2x-3)(2x-3)^2=(2x-3)^3$

←適当に組み合わせて同じものを登場させてもできる

(4) $4x^3-8x^2-9x+18=(4x^3-8x^2)+(-9x+18)=4x^2(x-2)-9(x-2)$

↑適当に組み合わせて同じものを登場させる　$=4x^2A-9A=A(4x^2-9)=(x-2)(4x^2-9)$

$=(x-2)(2x+3)(2x-3)$

14 (発展) 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x+3y-1)(x+3y+3)(x+3y+4)+12$

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

(3) $(a^2-1)(b^2-1)-4ab$

解答 (1) $(x+3y)(x+3y+1)(x+3y+5)$　(2) $(x^2+5x+5)^2$

(3) $(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)$

解説

(1) $x+3y=X$ とおくと

(与式)$=(X-1)(X+3)(X+4)+12$　←ここは頑張って展開する

$=(X-1)(X^2+7X+12)+12$

$=X^3+7X^2+12X-X^2-7X-12+12$

$=X^3+6X^2+5X=X(X^2+6X+5)=X(X+1)(X+5)$

$=(x+3y)(x+3y+1)(x+3y+5)$

(2) (与式)$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}+1$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

$=(A+4)(A+6)+1$

$=A^2+10A+24+1$

$=(A+5)^2=\{(x^2+5x)+5\}^2=(x^2+5x+5)^2$

(3) (与式)$=a^2b^2-a^2-b^2+1-4ab$

$=\{(ab)^2-2ab+1\}-(a^2+2ab+b^2)$　←２乗－２乗を目指して、この変形をする。（気が付けば奇跡ですが、これが１番早い）

$=(ab-1)^2-(a+b)^2$

$=\{(ab-1)+(a+b)\}\{(ab-1)-(a+b)\}$

$=(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)$

別解 (与式)$=(a^2-1)b^2-4ab-(a^2-1)$

$=(a+1)(a-1)b^2-4ab-(a+1)(a-1)$

$=\{(a+1)b+(a-1)\}\{(a-1)b-(a+1)\}$

$=(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)$

←b の２次式と考えて、たすき掛けをする

$a+1$	$a-1$ →	a^2-2a+1
$a-1$	$-(a+1)$ →	$-(a^2+2a+1)$
a^2-1	$-(a^2-1)$	$-4a$